Week 13: Kleine gevallen (set 1)

Bij veel opgaven is het niet direct duidelijk wat je moet of kan doen. Het is dan altijd nuttig om kleine gevalletjes te bekijken; moet je iets bewijzen voor alle positieve gehele n? Bekijk eerst het geval $n = 1$. Zorg dat je dit geval helemaal waterdicht kan bewijzen en ga dan naar $n = 2$. Bewijs ook in dit geval volledig en ga door naar de volgende n. Op een gegeven moment zal je iets verzinnen waarvan het duidelijk is dat het voor algemene n gaat werken.
Ook als je wel direct een idee hebt, dan is het erg nuttig om toch eerst kleine gevalletjes te bekijken. Zo kom je er bijvoorbeeld achter of er misschien randgevallen zijn waarvoor het algemene argument niet op gaat. Ook kan je op deze manier soms een vermoeden krijgen of alle oplossingen vinden van een vergelijking (zonder te kunnen bewijzen dat dat ze allemaal zijn) en dat kan al punten opleveren.
Houd het volgende lijstje met punten in gedachte.

- Zijn er meerdere manieren om je gevallen klein te houden? Houd alles klein. Het wordt snel genoeg duidelijk of en zo ja welke variabele je vrij kan laten.
- Gewoon doen, niet denken! Vijf minuten domweg schrijven om een goed idee te krijgen, is een goede tijdsbesteding.
- Houd er structuur en overzicht in. Sla geen gevallen over!
- Wat valt er op? Geldt dit ook in het volgende geval? Zo ja, probeer het te bewijzen. Schrijf je vermoedens op en geef duidelijk aan wat opvalt.
- Bekijk gegeneraliseerde, maar kleine, gevallen.
- Bedenk dat als je een opgave niet voor $n = 2$ kan bewijzen, het je ook niet gaat lukken voor algemene n.
- Wordt het volgende kleine geval te groot?
  - Bekijk alleen "interessante" gevallen. Zijn dat er nog te veel?
  - Bekijk van deze kleine interessante gevallen een zo algemeen mogelijke situatie.
- Heb je nog geen idee? Doe gewoon het volgende geval, zelfs als het vrij groot wordt.

We laten dit zien aan de hand van de volgende opgave.

Voorbeeldopgave 1 *Zij p een priemgetal en $n > p$ een natuurlijk getal zo dat $np+1$ een kwadraat is. Bewijs dat $n+1$ geschreven kan worden als de som van p kwadraten van positieve gehele getallen.*

De kleinste mogelijke p is natuurlijk 2, en dan geldt $n = 3, 4, \ldots$. We maken een tabel

n	3	4	5	6	7	8	9
$np+1$	7	$\underline{9}$	11	13	15	17	19

Het enige kwadraat hebben we aangegeven. De vraag is dus voor $(p, n) = (2, 4)$ of we $n + 1 = 5$ kunnen schrijven als de som van twee kwadraten. Dat is evident met

$$(p, n) = (2, 4) \Rightarrow n + 1 = 1^2 + 2^2.$$

Natuurlijk staan in de tabel alle oneven getallen vanaf 7 en de kwadraten daarin zijn natuurlijk de kwadraten van oneven getallen minstens 3. Nu hebben we 3 al gedaan, dus gaan we verder met $np + 1 \in \{5^2, 7^2, \ldots\}$.

$\sqrt{np+1}$	5	7	9	11
$np+1$	25	49	81	121
n	12	24	40	60
$n+1$	13	25	41	61

Nu vinden we unieke manieren om die kwadraten te kiezen:

$$(p,n) = (2,12) \Rightarrow n+1 = 2^2+3^2$$
$$(p,n) = (2,24) \Rightarrow n+1 = 3^2+4^2.$$

Nu hebben we voor $p = 2$ wel een vermoeden, maar het kost bijna geen tijd om het ook voor de volgende twee gevallen te controleren:

$$(p,n) = (2,40) \Rightarrow n+1 = 4^2+5^2$$
$$(p,n) = (2,61) \Rightarrow n+1 = 5^2+6^2.$$

In dit geval is het duidelijk dat de kwadraten iets te maken hebben met de k, zo dat $k^2 = np+1$. In dit geval kunnen we vast ook bewijzen dat $n+1 = (k-1)^2+k^2$. Dus we kunnen door naar $p = 3$.
Dus nu bekijken we $p = 3$. Voor welke n is $np+1$ een kwadraat? We gaan maar weer kleine $n > 3$ uitproberen.

n	4	5	6	7	8	9	10
$np+1$	13	$\underline{16}$	19	22	$\underline{25}$	28	31
k		4			5		

Nu groeit $np+1$ linear in n, maar de gaten tussen de kwadraten wordt steeds groter, dus eigenlijk is het net als net beter om vanuit k te gaan kijken.

k	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$np+1$	16	25	36	49	64	81	100	121	144
n	5	8		16	21		33	40	
$n+1$	6	9		17	22		34	41	

We zien dat alle kwadraten van getallen niet deelbaar zijn door 3 juist van de vorm $3n+1$ zijn. Het is duidelijk dat kwadraten van drievouden juist niet zo te schrijven zijn. Laten we nu weer kwadraten zoeken. We geven ook de k weer, want die lijkt belangrijk te zijn.

$$(p,k,n) = (3,4,5) \Rightarrow n+1 = 1^2+1^2+2^2$$
$$(p,k,n) = (3,5,8) \Rightarrow n+1 = 1^2+2^2+2^2$$
$$(p,k,n) = (3,7,16) \Rightarrow n+1 = 2^2+2^2+3^2$$
$$(p,k,n) = (3,8,21) \Rightarrow n+1 = 2^2+3^2+3^2$$
$$(p,k,n) = (3,10,33) \Rightarrow n+1 = 3^2+3^2+4^2$$
$$(p,k,n) = (3,11,40) \Rightarrow n+1 = 3^2+4^2+4^2$$

In de oplossingen zien we twee verschillende patronen, maar als k drie toeneemt, dan nemen alle drie de kwadraten met een toe. Dat onderscheid lijkt dus te zijn of k congruent aan 1 of 2 $\mod 3$ is. Als we hebben dat $k = 3m+1$, dan vinden $n+1 = m^2+m^2+(m+1)^2$ en als juist geldt $k = 3m+2$, dan zien we $n+1 = m^2+(m+1)^2+(m+1)^2$. Ter controle proberen we nog even $k = 13$ en $k = 14$ (beide met $m = 4$), dat geeft $n+1 = 57$ en $n+1 = 66$ en die zijn inderdaad gelijk aan respectievelijk $4^2+4^2+5^2$ en $4^2+5^2+5^2$.
Nu volgt natuurlijk de gevallen met $p = 5$. Net als hiervoor gaan we kijken naar k zo dat er een n is met $pn+1 = k^2$

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$np+1$	36	49	64	81	100	121	144	169	196
n	7			16		24			39
$n+1$	8			17		25			40

Nu vinden we juist een n als k congruent is aan 1 of 4 $\mod 5$. Dit kunnen we beter zien als ± 1 $\mod 5$, want dan zien we dat dat ook is wat we hadden bij $p = 2$ en $p = 3$. Dit kunnen we nu algemeen bewijzen. Dan gaan we vervolgens verder met onze gevallen hierboven. We splitsen de gevallen we weer op aan de hand van het teken in $k = 5m \pm 1$.

$$(p, k, n) = (5, 6, 7) \Rightarrow n + 1 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$$
$$(p, k, n) = (5, 11, 24) \Rightarrow n + 1 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$$

en

$$(p, k, n) = (5, 9, 25) \Rightarrow n + 1 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$(p, k, n) = (5, 14, 40) \Rightarrow n + 1 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$$

Er geldt dus nog steeds dat als $k = 5m + 1$, dan vinden we $n + 1 = 4m^2 + (m - 1)^2$. Als juist $k = 5m - 1$, dan zien we $n + 1 = (m - 1)^2 + 4m^2$. We kunnen dit nog even snel controleren voor $m = 3$ en $n = \frac{1}{5}16^2 - 1 = \frac{1}{5}\cdot 15\cdot 17 = 3\cdot 17 = 51$ en $m = 4$ en $n = \frac{1}{5}19^2 - 1 = \frac{1}{5}\cdot 18\cdot 20 = 18\cdot 4 = 72$. Dan vinden we dat $n + 1$ is dan 52 en 72 en inderdaad

$$52 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$$
$$72 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2.$$

We bekijken nu ter laatste controle $k = 2 \cdot 7 \pm 1$ voor $p = 7$, zodat we krijgen $n = \frac{1}{7}(13^2 - 1) = \frac{1}{7} \cdot 12 \cdot 14 = 12 \cdot 2 = 24$ en $n = \frac{1}{7}(15^2 - 1) = \frac{1}{7} \cdot 14 \cdot 16 = 2 \cdot 16 = 32$ ook hier geldt

$$25 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$33 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2.$$

Er lijkt dus nu in het algemeen te gelden dat $k \equiv \pm 1 \mod p$ en dat voor $k = pm + 1$ we hebben $n + 1 = (p - 1)m^2 + (m + 1)^2$ en voor $k = pm - 1$ juist $n + 1 = m^2 + (p - 1)(m + 1)^2$. Daarmee is de opgave gereduceerd tot een simpele schrijfoefening.

Opgaven

Opgave 1 *Een dorp bestaande uit 2016 mensen staan in een cirkel en spelen een balspel. De burgemeester begint. Telkens als een speler de bal krijgt, geeft hij deze door aan zijn linker- of rechterbuur, of de persoon precies tegenover hem. De bal mag niet doorgespeeld worden aan iemand die de bal al gehad heeft. Het spel gaat net zo lang door totdat iedereen de bal gehad heeft. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de laatste persoon die de bal heeft?*

Opgave 2 *Wat zijn de laatste vier cijfers van* 5^{2017}*?*

Opgave 3 *De bewerking* $\IroningI$ *voldoet voor alle positieve getallen* x *en* y *aan de volgende drie regels:*

Regel 1: $(2x) \IroningI y = \frac{1}{2} + (x \IroningI y)$.

Regel 2: $y^2 \IroningI x = x^2 \IroningI y$.

Regel 3: $2 \IroningI 2 = \frac{3}{2}$.

Bereken $32 \IroningI 8$ *en geef een voorbeeld van een operatie* $\IroningI \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *die zich aan deze regels conformeert.*

Opgave 4 *Er staan* 2017^2 *lampjes in een tabel. Als je er op een drukt, verandert dat lampje en de lampjes in dezelfde rij en kolom van toestand. Alle lampen staan aan. Wat is het kleinste aantal keren drukken dat nodig is om alle lampjes uit te krijgen?*

Opgave 5 *We beschouwen $4k$ fiches, waarvan er $2k$ rood zijn en $2k$ blauw. We kunnen een rijtje van deze $4k$ fiches veranderen in een ander rijtje door een zogenaamde* zet*, die bestaat uit het omwisselen van een aantal (mogelijk één) opeenvolgende rode fiches met een gelijk aantal opeenvolgende blauwe fiches. We kunnen bijvoorbeeld in één zet het rijtje $r\underline{bb}br\underline{rr}b$ veranderen in $r\underline{rr}br\underline{bb}b$, waarbij r staat voor een rood fiche en b voor een blauw fiche.*
Bepaal het kleinste getal n (als functie van k) zodanig dat, ongeacht met welk rijtje van deze $4k$ fiches we beginnen, we ten hoogste n zetten nodig hebben om het rijtje te bereiken waarvan de eerste $2k$ fiches allemaal rood zijn.

Opgave 6 *Consider a $(2m-1)\times(2n-1)$ rectangular region, where m and n are integers such that $m, n \geq 4$. This region is to be tiled using tiles of the two types shown (S-vorm met 4 blokjes, L-vorm met 3 blokjes). The tiles may be rotated and reflected, as long as their sides are parallel to the sides of the rectangular region. They must all fit within the region, and they must cover it completely without overlapping. What is the minimum number of tiles required to tile the region?*

Opgave 7 *De studievereniging wiskunde organiseert een borrel voor $2n$ leden, waarbij $n \geq 3$ een geheel getal is. Onder de $2n$ aanwezigen zijn ook de praeses (voorzitter) en quaestor (penningmeester) van de vereniging. De borrel vindt plaats in twee verschillende ruimtes. In elk van de ruimtes kunnen precies n mensen borrelen. De borrel wordt georganiseerd in een positief geheel aantal van k rondes; in elke ronde zijn er n mensen in de ene ruimte en n mensen in de andere ruimte. Er wordt een schema opgesteld om bij elke ronde aan te geven hoe de $2n$ leden over de twee ruimtes verdeeld zijn. Om de contacten tussen de leden te bevorderen, is het de bedoeling dat elk tweetal leden elkaar tijdens minstens een ronde tegenkomt. (Met tegenkomen bedoelen we dat de twee mensen in dezelfde ruimte borrelen.) Hierop is een uitzondering: de praeses en de quaestor kunnen elkaar niet luchten of zien en mogen daarom juist tijdens geen enkele ronde in dezelfde ruimte borrelen.*

(a) Bewijs dat er voor $k = 3$ geen schema bestaat dat aan deze voorwaarden voldoet.

(b) Bewijs dat er voor $k = 4$ wel een schema bestaat dat aan deze voorwaarden voldoet.

Opgave 8 *Call a subset S of $\{1, 2, \ldots, n\}$ mediocre if it has the following property: Whenever a and b are elements of S whose average is an integer, that average is also an element of S. Let $A(n)$ be the number of mediocre subests of $\{1, 2, \ldots, n\}$. [For instance, every subset of $\{1, 2, 3\}$ except $\{1, 3\}$ is mediocre, so $A(3) = 7$.] Find all positive integers n such that $A(n+2)-2A(n+1)+A(n) = 1$.*

Opgave 9 *Een groep van $2n$ studenten wordt gefotografeerd. Ze staan in twee rijen met n studenten zodat beide rijen oplopend zijn in lengte en de achterste studenten zichtbaar zijn (i.e. groter dan degene direct voor hem/haar). Hoeveel verschillende foto's kunnen we maken?*

Opgave 10 *Laat S een eindige verzameling zijn met m elementen. Voor een afbeelding $f\colon S \to S$ bekijken we de samengestelde afbeeldingen $f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f(f(x)))$, enz. Een afbeelding f heet* saai *als er een n is zodat $f^n = f^{n+1}$. Bepaal het aantal saaie fs (als functie van m).*