Week 2: Combinatoriek I (set 2)

Opgave 1 *Geef een combinatorisch bewijs voor de volgende identiteiten:*

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$;

(b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (n-1)(n-1)! = n! - 1$;

(c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 2 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$.

Opgave 2 *Laat F_n het aantal manieren zijn om een pad van lengte $n-1$ met enkel tegels van grootte 1 en 2 te betegelen. Er geldt dus $F_1 = F_2 = 1$. Geef combinatorische bewijzen voor de volgende identiteiten:*

(a) $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$;

(b) $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+1} - 1$;

(c) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

(d) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

(e) $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$;

(f) $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}$.

Opgave 3 *Hoeveel permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ zijn er zodat elk getal ofwel kleiner ofwel groter is dan al zijn voorgangers?*

Opgave 4 *Zijn k, n en ℓ natuurlijke getallen. Hoeveel deelverzamelingen S van $\{1, \ldots, n\}$ zijn er zodat $|S| = k$ en voor ieder tweetal verschillende elementen $a, b \in S$ geldt dat $|a - b| > \ell$.*

Opgave 5 *Hoeveel 01-rijtjes zijn er van lengte n waarin geen drie nullen of drie enen achter elkaar staan?*

Opgave 6 *Zijn m en n twee natuurlijke getallen zodanig dat $m \geqslant n$.*

(a) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ bestaan er?

(b) Hoeveel van deze functies zijn injectief?

(c) Hoeveel van deze functies zijn (strikt) stijgend?

(d) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ zijn niet-dalend?

(e) Hoeveel functies $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ zijn surjectief?

Opgave 7 *Bereken* $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2$.

Opgave 8 *Bewijs dat*

$$n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} = m(-1)^{m-1} \binom{n}{m}.$$

Opgave 9 *Laat n en k positieve gehele getallen zijn. Bepaal de som*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k}.$$

Opgave 10 (Bonus) *Beschouw paden in het rooster van $(0,0)$ naar (n,n) bestaande uit stappen van lengte 1 naar rechts en naar boven. Zij P de verzameling van zulke paden. Een diagonaalpunt is een punt van de vorm (i,i). Voor een pad $p \in P$, is $a(p)$ het aantal diagonaalpunten op p (inclusief $(0,0)$ en (n,n)). Bereken*

$$\sum_{p \in P} a(p).$$