Week 24: samengestelde getallen en algemene getaltheorie

Deze week gaan we de getaltheorie die we al gedaan hebben herhalen. In het bijzonder gaan we dat toepassen op samengestelde getallen. Denk bij getaltheorie nog steeds aan de volgende dingen:

- Doe kleine gevallen! Bedenk dat bij getaltheorie de kleine gevallen niet per se $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn. Soms kan je een opgave oplossen voor getaltheoretisch simpele getallen zoals priemgetallen en dan voor getallen van de vorm p^2 of juist pq met $p \neq q$ priemgetallen. Bij twijfel: doe beide vormen van kleine gevallen.
- Werk met delers en gebruik modulorekenen.
- In het bijzonder geldt er dat een getal n modulo 9 (en dus ook modulo 3) congruent is aan de som van de cijfers. Modulo 11 is het juist congruent aan de alternerende som.
- Gebruik de Chinese reststelling en de stellingen van Euler-Fermat en Wilson om het modulorekenen gemakkelijker te maken.
- Om te bewijzen dat een getal n samengesteld is, is het eenvoudigweg voldoende om n te schrijven als kl met $1 < k, l$ gehele getallen.
- In uitzonderlijke gevallen kan je zelfs een t, k en l vinden zo dat $tn = kl$ en $t < k, l$.

Opgaven

Opgave 1 *We beginnen met het getal 7^{1996}. In iedere stap verwijderen we het meest linker cijfer ongelijk aan 0 en tellen dit bij het overgebleven getal op. Dit herhalen we tot een getal van precies 10 cijfers overblijft. Bewijs dat twee van deze tien cijfers gelijk zijn.*

Opgave 2 *Bewijs dat voor iedere gehele $k \geq 1$ geldt dat $521 \cdot 12^k + 1$ een samengesteld getal is.*

Opgave 3 *Er is bekend dat 2^{29} een getal is van precies negen cijfers en dat deze 9 cijfers verschillend zijn. Welke van de tien mogelijke cijfers 0, 1, ..., 9 komt niet in dit getal voor?*

Opgave 4 (CanMO 1971) *Toon aan dat voor alle gehele getallen n geldt dat*

$$n^2 + 2n + 12$$

geen veelvoud is van 121.

Opgave 5 (Putnam 1988) *Bewijs dat ieder positief samengesteld getal te schrijven is als*

$$xy + yz + zx + 1$$

met x, y en z positieve gehele getallen.

Opgave 6 (Putnam 1989) *Hoeveel getallen in de rij*

$$1, 101, 10101, 1010101, \ldots$$

zijn priem?

Opgave 7 *Vind alle positieve gehele getallen die niet geschreven kunnen worden als de som van twee of meer opeenvolgende positieve gehele getallen.*

Opgave 8 *Bepaal alle priemgetallen in de rij*

$$37, 371, 3711, 37111, \ldots$$

Opgave 9 (Baltic Way 2012) *Vind alle oplossingen in gehele getallen van de vergelijking*

$$2x^6 + y^7 = 11.$$

Opgave 10 (Baltic Way 2012) *Bewijs $n^n + (n+1)^{n+1}$ voor oneindig veel positieve gehele getallen n samengesteld is.*

Opgave 11 *Bewijs dat in iedere basis $b \geq 2$ het getal 10101 samengesteld is.*

Opgave 12 *Vind alle positieve even getallen die geschreven kunnen worden als de som van twee oneven samengestelde getallen.*

Opgave 13 *Bestaan er oneindig veel natuurlijk getallen n zo dat $2^n - 8$ deelbaar is door n?*

Opgave 14 (Putnam 1997) *We definieren een rij getallen door $a_0 = 1$ en $a_{k+1} = 2^{a_k}$. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Bewijs dat*

$$a_n \equiv a_{n-1} \mod n.$$

Opgave 15 *Bewijs dat er oneindig veel samengestelde n bestaan zo dat $3^{n-1} - 2^{n-1}$ deelbaar is door n.*

Opgave 16 (BxMO 2015) *Staan er priemgetallen in de rij*

$$38, 381, 3811, 38111, \ldots?$$

Opgave 17 (IMO 1975) *Zij A de som van de cijfers van het getal 4444^{4444} in decimale notatie. Schrijf B voor som van de cijfers van A. Bepaal de som van de cijfers van B.*

Opgave 18 (ELMO 2009) *Laat a, b en c positieve gehele getallen zijn zodat $a^2 - bc$ een kwadraat is. Bewijs dat $2a + b + c$ geen priemgetal is.*

Opgave 19 (Putnam 2010) *Bewijs dat voor iedere gehele $n \geq 1$ het getal*

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

niet priem is.

Opgave 20 *Zij p een polynoom met gehele coëfficiënten van graad minstens 1. Bewijs dat $|p(n)|$ samengesteld is voor oneindig veel gehele getallen n.*

Opgave 21 (IMO 1971) *Bekijk de verzameling*

$$S = \left\{2^k - 3 \mid k \in \{2, 3, 4, \ldots\}\right\}.$$

Bewijs dat er een oneindige deelverzameling T van S bestaat zo dat de elementen van T paarsgewijs onderling ondeelbaar zijn.