Week 5: Analyse I

De reële getallen

Eigenschappen van $\mathbb{R}$.

- optellen, vermenigvuldigen en delen;
- afstand;
- totale ordening;
- een eindig supremum (en infimum) bestaat voor iedere begrensde niet-lege deelverzameling.

Deelverzamelingen

Het *balletje* met straal $\varepsilon > 0$ om $x \in \mathbb{R}$ is de verzameling van alle punten $y \in \mathbb{R}$ die voldoen aan $|x - y| < \varepsilon$.

Een *verdichtingspunt*, ook *limietpunt* genoemd, van een deelverzameling S van $\mathbb{R}$ is een punt x zo dat ieder balletje om x oneindig veel punten gemeen heeft met S.

Een punt $x \in S \subseteq \mathbb{R}$ noemen we een *geïsoleerd punt* precies als er balletje om x bestaat waarvan de doorsnede met S alleen uit x bestaat.

Een *randpunt* van S is een $x \in \mathbb{R}$ zo dat ieder balletje om x zowel een punt in S als een punt buiten S bevat.

Een *inwendig punt* van S is een $x \in \mathbb{R}$ zo dat een balletje om x volledig in S ligt.

Een deelverzameling is *open* als ieder punt in deze verzameling een inwendig punt is. Een verzameling is *gesloten* als het alle randpunten bevat.

Rijtjes

Zij a_n voor $n \in \mathbb{N}$ een rijtje reële getallen.

Bekijk de verdichtingspunten $\mathrm{Verd}(a_n)$ van de multiset $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (dat zijn dus precies de vereniging van enerzijds de verdichtingspunten van de verzameling en anderzijds de punten die oneindig vaak voorkomen). Het infimum van deze limietpunten schrijven we als $\liminf_{n\to\infty} a_n$, welke een waarde aanneemt in $\mathbb{R}$ uitgebreid met ∞ en $-\infty$. Analoog bestaat er een $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Ondanks deze overzichtelijke intuïtieve definitie valt dat van de exacte definitie niet te zeggen:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{en} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Dit mag je ook gewoon gebruiken, tenzij de opgave vraagt om dit te bewijzen.

We noemen een rij *convergent* precies als $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$ eindig zijn en bovendien gelijk aan elkaar. Deze waarde noemen we de *limiet* van de rij.

Een rij in $\mathbb{R}^n$ noemen we convergent als de rij van i-de coördinaten convergeert voor elke $1 \leq i \leq n$.

Lemma 1 *Iedere rij reële getallen heeft een monotone deelrij.*

Stelling 2 (Bolzano-Weierstrass) *Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}^n$ heeft een convergente deelrij.*

Functies

Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ een deelverzameling en $x \in U$ een willekeurig punt. Een functie $f : U \to \mathbb{R}$ heet *continu in* x als voor ieder rijtje $a_n \in U$ dat convergeert naar x geldt dat $f(a_n)$ convergeert in $\mathbb{R}^n$.

Een afbeelding $f : U \to \mathbb{R}^n$ heet *continu* als f continu is in iedere $x \in U$.

Opgaven (set I)

Opgave 1 *Zij $x \in S \subseteq \mathbb{R}$ een willekeurig punt. Bewijs dat x óf een verdichtingspunt is van S óf een geïsoleerd punt is van S.*

Opgave 2 *Geef een aftelbaar oneindige verzameling zonder verdichtingspunten.*

Opgave 3 *Is een verdichtingspunt altijd een randpunt? Is een randpunt altijd een verdichtingspunt?*

Opgave 4 *Iedere eindige verzameling van $\mathbb{R}$ bestaat alleen uit geïsoleerde punten.*

Opgave 5 *Bewijs dat als x_n een stijgend rijtje is en $\sup x_n < \infty$ dan geldt dat x_n convergeert en wel naar $\sup x_n$.*

Opgave 6 *Bewijs dat $x \in S \subseteq \mathbb{R}$ een verdichtingspunt is van S dan en slechts dan als $x = \inf\{y \in S \mid y \geq x\}$ of $x = \sup\{z \in S \mid z \leq x\}$.*

Opgave 7 *Bewijs dat $\mathrm{Verd}(a_n)$ van een rij a_n niet verandert als je eindig veel punten weglaat.*

Opgave 8 *Zij $x \in \mathbb{R}$ een vast punt. Kies nu een element in $B(x, \frac{1}{n})$ voor iedere positieve gehele n. Bewijs dat de verzameling van deze punten hoogstens één verdichtingspunt heeft. In welke gevallen heeft zo'n verzameling geen verdichtingspunt?*
Verklaar waarom we evenwel een punt hadden kunnen kiezen in $B(x, \varepsilon)$ voor iedere $\varepsilon > 0$.

Opgave 9 *Zij een rij reële getallen en x een reëel getal. Bewijs dat er een deelrij is die convergeert naar x dan en slechts dan als voor iedere ε er oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ zijn met $a_n \in B(x, \varepsilon)$.*

Opgave 10 *Gegeven zijn een $U \subseteq \mathbb{R}$ en een $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat er een rij a_n in U bestaat die convergeert naar x dan en slechts dan als $x \in U$ of x een verdichtingspunt van U is.*

Opgave 11 *Bewijs dat een $r \in \mathbb{R}$ een element is van $\mathrm{Verd}(a_n)$ precies als r de limiet is van een deelrij van a_n.*

Opgave 12 *Bewijs dat een rijtje a_n voor $n \in \mathbb{N}$ voldoet aan $\limsup a_n = \liminf a_n$ dan en slechts dan als a_n convergeert volgens de definitie die je geleerd hebt bij Wiskundige Structuren.*

Opgave 13 *Bewijs dat een rij convergeert dan en slechts dan als elke deelrij convergeert.*

Opgave 14 *Bewijs dat een verzameling open is dan en slechts dan als het complement gesloten is.*

Opgave 15 *Bewijs dat de enige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die zowel open als gesloten zijn de lege verzameling en $\mathbb{R}$ zijn.*

Opgave 16 *Is een de verzameling verdichtingspunten van een rij reële getallen altijd gesloten? Bestaat er altijd een deelrij die convergeert naar de limes superior?*

Opgave 17 *Bewijs dat een overaftelbaar deelverzameling altijd een verdichtingspunt heeft.*

Opgave 18 *Een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoet aan $f(q) = q$ voor alle $q \in \mathbb{Q}$. Bewijs dat $f(r) = r$ voor alle $r \in \mathbb{R}$.*

Opgaven (Set II)

Opgave 19 *Bewijs dat als x_n een stijgend rijtje is en $\sup x_n < \infty$ dan geldt dat x_n convergeert en wel naar $\sup x_n$.*

Opgave 20 (PUMA 2011)

a) *Bepaal of onderstaande rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ al dan niet convergeert. Indien ze convergeert, bepaal ook de limiet.*

$$a_n = \frac{\text{kgv}(1, 2, \ldots, n)}{n!}.$$

b) *Doe hetzelfde voor de rij $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Bepaal de convergentie en de eventuele limiet.*

$$b_n = \frac{\text{ggd}(1, 2, \ldots, n-1)}{\text{kgv}(1, 2, \ldots, n)}.$$

Opgave 21 *Bewijs dat als $f : U \to V$ en $g : V \to W$ allebei continu zijn, hetzelfde geldt voor $g \circ f$.*

Opgave 22 *We weten dat als a_n en b_n convergeren dat $a_n + b_n$ dan ook convergeert. Bewijs dat $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu is. In het bijzonder geldt dus dat als twee functies $f, g : U \to \mathbb{R}$ continu zijn, dat ook geldt voor $f + g$.*

Opgave 23 *Bewijs dat als $s = \sup S$ eindig is dat het dan de grootste $s \in \mathbb{R}$ is met de eigenschap: alles in S is niet groter dan s en er is iets in S dat hooguit $\varepsilon > 0$ kleiner is dan s.*

Opgave 24 *Bewijs dat als $s = \limsup_{n\to\infty} a_n$ eindig is dat het dan de grootste $s \in \mathbb{R}$ is met de eigenschap: voor alle $\varepsilon > 0$ en iedere $N \in \mathbb{N}$ geldt dat er een $k \geq N$ is met $a_k \in B(s, \varepsilon)$.*

Opgave 25 *Bewijs dat iedere continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ met een nulpunt ook een kleinste en een grootste nulpunt heeft.*
Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met een nulpunt, maar zonder kleinste of grootste nulpunt.

Opgave 26 *Bewijs dat*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Opgave 27 *Bewijs dat*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Opgave 28 *Bewijs dat een deelverzameling $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gesloten is precies als de verzameling 'gesloten is onder limieten.' Dat wil zeggen dat de limiet van iedere convergente rij $x_n \in U$ ook in U ligt.*

Opgave 29 *Bewijs dat een overaftelbaar deelverzameling altijd overaftelbaar veel verdichtingspunten heeft.*

Opgave 30 *Vind alle continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan $f(0) = 1$ en*

$$f(2x) - f(x) = x,$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 31 *Een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoet aan $f(x) = f(x^2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat f constant is.*

Opgave 32 *Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu in 0 die voldoen aan*

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

voor iedere x in het domein.

Opgave 33 *Twee continue functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoen aan $f(q) = g(q)$ voor alle $q \in \mathbb{Q}$. Bewijs dat $f(r) = g(r)$ voor alle $r \in \mathbb{R}$.*