Analyse

Bij de analysesessie van de wiskundewedstrijdtraining (week 18) hebben we geleerd de stelling van Rolle creatief toe te passen. Minstens net zo belangrijk in moeilijke analyse-opgaven is kunnen prutsen met ongelijkheden, epsilons en delta's. Hiervoor geven we eerst een paar handige lemmas.

Lemma 1. *Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar in het punt a, met $f(a) = 0$ en $f'(a) > 0$. Dan is er een $\epsilon > 0$ zodat f positief is op het interval $(0, \epsilon)$.*

Bewijs. Dit volgt direct uit de definitie van de afgeleide. Er zijn natuurlijk vergelijkbare stellingen met andere tekens. □

Lemma 2. *Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar en heeft een lokaal maximum in a (dat betekent dat er een $\epsilon > 0$ is zodat f gedefinieerd is op $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ en op dat interval een maximum heeft in a). Dan geldt $f'(a) = 0$.*

Bewijs. Dit volgt uit Lemma 1. □

Lemma 3. *Stel f is continu en gedefinieerd op een compact interval. Als f nulpunten heeft, dan heeft f ook een grootste en een kleinste nulpunt.*

Bewijs. Merk op dat $f^{-1}(0)$ gesloten is. □

Lemma 4. *Een differentieerbare functie met een positieve afgeleide is stijgend. Als de afgeleide niet-negatief is, is de functie niet-dalend.*

Bewijs. Dit volgt uit de stelling van Rolle/middelwaardestelling. □

De afgeleide van een functie hoeft niet continu te zijn (als dat wel het geval is heet de functie continu differentieerbaar). De afgeleide van een functie hoeft zelfs niet integreerbaar te zijn! Andersom, als f een integreerbare functie is, is de functie $F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ niet noodzakelijk differentieerbaar. Als f continu is werkt dat wel, en is de afgeleide van F weer f. Pas hier dus mee op!

Hoewel de afgeleide van een functie niet continu hoeft te zijn, hebben we wel het volgende nuttige resultaat:

Lemma 5 (Stelling van Darboux)**.** *Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een differentieerbare functie en a, b zijn reëel. Dan bereikt f' alle waarden tussen $f'(a)$ en $f'(b)$.*

Bewijs. Zie opgave 4. □

Dit resultaat zou onmiddellijk volgen als f' continu zou zijn, met behulp van de tussenwaardestelling. Het werkt nog steeds als we een continue functie g bij f' optellen: immers, g heeft een primitieve G en dan is $g + f'$ de afgeleide van $G + f$. De stelling van Darboux is handig als je iets moet bewijzen van de vorm: er is een x zodat $f'(x) = zooi$, waarbij $zooi$ continu afhangt van x. Dan is het namelijk genoeg om te bewijzen dat $f'(x) \geq zooi$ voor een x, en $f'(x) \leq zooi$ voor een x.

Om deze feiten in actie te zien bekijken we een voorbeeldopgave. Dit is opgave 8 van week 18 van de wwt.

Voorbeeldopgave *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een twee keer differentieerbare continue functie met $f(0) = 0$. Bewijs dat er een ξ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bestaat met $f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2(\xi))$.*

Bewijs. Om het bewijs te volgen kan het handig zijn zelf een paar grafiekjes te maken van de relevante functies. Aangezien ξ tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ moet gaan liggen, zien we dat het er niet toe doet wat f buiten dat interval doet. Wel kan relevant zijn dat $f(x)$ naar een eindige waarde moet naderen als x naar $-\frac{\pi}{2}$ of $\frac{\pi}{2}$ gaat, want f is continu.
Merk op dat $1 + 2\tan(x)^2$ een continue functie is van x op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, die 1 is bij 0 en naar oneindig nadert bij de beide eindpunten. Nu is $f(x)(1 + 2\tan^2(x))$ ook een continue functie van x, en deze heeft dus een primitieve $h(x)$. Dan is $f''(x) - f(x)(1 + 2\tan^2(x))$ de afgeleide van $f'(x) - h(x)$. Als we nu weten dat $f''(x) - f(x)(1 + 2\tan^2(x))$ soms niet-positief en soms niet-negatief is, dan kunnen we de stelling van Darboux gebruiken om te concluderen dat er een nulpunt is, en zijn we klaar.
Stel dus uit het ongerijmde dat $f''(x) > f(x)(1 + 2\tan^2(x))$ voor alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (het omgekeerde teken gaat analoog). We zien dat als $f(x)$ positief is, dat $f''(x)$ dat dan ook moet zijn. Als x dicht bij $\frac{\pi}{2}$ zit, moet $f''(x)$ zelfs erg groot worden. Daardoor stijgt $f'(x)$ snel, en $f(x)$ vervolgens ook, waardoor $f''(x)$ voor een iets grotere x nog groter moet zijn. Als we kunnen bewijzen dat $f(x)$ hierdoor naar oneindig gaat, hebben we een tegenspraak te pakken.
Stel dat $f'(0) \geq 0$ (het andere geval gaat analoog door $-f$ te bekijken). Aangezien $f''(0) > 0$ is er een ϵ zodat $f'(x)$ positief is op $(0, \epsilon)$. Dan is $f(x)$ daar stijgend, en dus ook positief. Stel nu dat f op $(0, \frac{\pi}{2})$ nog een nulpunt heeft. Dan is er ook een kleinste nulpunt, noem dat a. Met Rolle volgt dat er een $0 < b < a$ is met $f'(b) = 0$. Dan is er een $0 < c < b$ met $f''(c) = 0$. Maar $f''(c) > f(c)(1 + 2\tan^2(c))$, dus moet gelden $f(c) < 0$. Omdat $f(\frac{\epsilon}{2}) > 0$, is er tenslotte een $0 < d < c$ met $f(d) = 0$. Dus d is een kleiner nulpunt, tegenspraak. We zien dus dat f positief is op $(0, \frac{\pi}{2})$, en f'' dus ook, en f' dus ook.
We kunnen in de vergelijking $f''(x) > f(x)(1+2\tan^2(x))$ de rechterkant makkelijk afschatten omdat $f(x)$ stijgend is. Als $x > 1$ geldt dus $f''(x) > c(1+2\tan^2(x))$, met $c = f(1)$. De rechterkant kunnen we nu integreren, dat wordt $c(2\tan(x) - x)$, en nog een keer integreren geeft $g(x) = c(-2\log(\cos(x)) - \frac{1}{2}x^2)$. Dus $f''(x) > g''(x)$ voor $x \in (1, \frac{\pi}{2})$. Als nu $h(x) = f(x) - g(x)$ staat er $h''(x) > 0$ op $(1, \frac{\pi}{2})$, dus $h'(x) \geq h'(1)$ op $(1, \frac{\pi}{2})$, dus $h(x) \geq h'(1)(x-1) + h(1)$ op $(1, \frac{\pi}{2})$. Dus $f(x) \geq g(x) + (x-1)h'(1) + h(1)$ voor $x \in (1, \frac{\pi}{2})$. Echter, $g(x)$ nadert naar ∞ als x naar $\frac{\pi}{2}$ nadert, dus $f(x)$ nadert dan ook naar ∞. Maar $f(x)$ moet naar $f(\frac{\pi}{2})$ naderen, tegenspraak. $\square$

Opgaven

Opgave 1. *Als je de bewijzen van lemma's 1 tot en met 4 niet overtuigend vindt, bewijs ze dan zelf.*

Opgave 2. *Stel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is twee keer differentieerbaar, en* $f''(x) \geq x^2 + \sin(x)$ *voor alle* x. *Bewijs dat er constantes* a *en* b *zijn zodat* $f(x) \geq \frac{1}{12}x^4 - \sin(x) + ax + b$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 3. *Vind alle continue functies* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die voldoen aan* $f(2x) - f(x) = x$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 4 (Stelling van Darboux)**.** *Stel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is differentieerbaar. Zij* $a < b$ *reëele getallen. Stel dat* t *voldoet aan* $f'(a) < t < f'(b)$ *of* $f'(b) < t < f'(a)$. *Bewijs dat er een* $x \in (a, b)$ *is met* $f'(x) = t$.

Opgave 5 (IMC 1994)**.** *Laat* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *continu differentieerbaar zijn met* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *en* $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$. *Stel dat* $f'(x) + f(x)^2 \geq -1$ *voor* $x \in (a, b)$. *Bewijs dat* $b - a \geq \pi$ *en geef een voorbeeld waarbij gelijkheid geldt.*

Opgave 6 (IMC 1994)**.** *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continu differentieerbaar met* $f(a) = 0$. *Veronderstel dat er een* $\lambda > 0$ *is met* $|f'(x)| \leq \lambda|f(x)|$ *voor alle* $x \in [a, b]$. *Moet* $f(x)$ *noodzakelijk nul zijn voor alle* x*?*

Opgave 7 (IMC 1995)**.** *Zij* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *een twee keer differentieerbare functie met* $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ *en* $\lim_{x\to 0} f''(x) = \infty$. *Laat zien dat* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

Opgave 8 (IMC 1997)**.** *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *drie keer continu differentieerbaar, met* $f(x) \geq 0$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$. *Stel* $f(0) = f'(0) = 0$ *en* $f''(0) > 0$. *Bekijk* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gedefinieerd door* $g(x) = \left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)'$ *en* $g(0) = 0$. *Bewijs dat er een* $\epsilon > 0$ *is zodat* g *begrensd is op* $(-\epsilon, \epsilon)$. *Is het ook noodzakelijk waar als* f *maar twee keer differentieerbaar is?*

Opgave 9 (IMC 1997)**.** *Zij* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *een continue functie. We zeggen dat* f *'de as kruist' in* x *als* $f(x) = 0$ *en in elke open buurt van* x *zijn er* y, z *met* $f(y) < 0$ *en* $f(z) > 0$.
a) Geef een continue functie die de as oneindig vaak kruist.
b) Bestaat er een continue functie die de as overaftelbaar vaak kruist?

Opgave 10 (IMC 1999)**.** *a) Vind voor elke* $p > 1$ *een constante* $c_p < \infty$ *zodat voor elke continu differentieerbare* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *met* $f(1) > f(-1)$ *en* $|f'(y)| \leq 1$ *voor alle* $y \in [-1, 1]$ *er een* $x \in [-1, 1]$ *is met* $f'(x) > 0$ *en* $|f(y) - f(x)| < c_p(f'(x))^{\frac{1}{p}}|y - x|$ *voor alle* $y \in [-1, 1]$.
b) Bestaat er ook zo'n constante als $p = 1$*?*

Linear algebra

When solving linear algebra related problems there are a lot of techniques and strategies you can use. There are also numerous lemmas and theorems which can be really helpful. There is however not enough space on this piece of paper to write them all down. So instead here is a list which contains some handy theorems and properties of matrices.

In the following let A and B be two $n \times n$–matrices with entries from some nice field (i.e. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc.)

- By the rank-nullity theorem we have $\operatorname{rank}(A) + \dim(\ker A) = n$.
- If $AB = I_n$ then we also have $BA = I_n$.
- A vector $v \neq 0$ and a scalar λ are respectively an eigenvector and an eigenvalue of A if $Av = \lambda v$.
- The characteristic polynomial of A is defined as $p_A(x) = \det(xI - A)$.
- The eigenvalues of A are precisely the zeros of p_A.
- The number of linear independent eigenvectors with the same eigenvalue of a matrix A is at most the multiplicity of the eigenvalue as a zero of p_A.
- By the theorem of Cayley-Hamilton we have that $p_A(A) = O$.
- Let p be a polynomials and $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ the eigenvalues of A then the eigenvalues of $p(A)$ are precisely $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$.
- All polynomials p with $p(A) = O$ form an ideal I in $\mathbb{C}[X]$. Since $\mathbb{C}[X]$ is a principal ideal domain there exists a unique monic polynomial m_A with $I = (m_A)$. This polynomial is called the minimal polynomial of A.
- If the entries of A are from a field $k \subseteq \mathbb{C}$ then $m_A \in k[X]$.
- The polynomial m_A divides p_A, moreover each eigenvalue of A is a zero of m_A.
- The matrix A is diagonalizable precisely when the minimal polynomial has only distinct linear factors.

Problems

Problem 1. Let $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ be unit vectors. Suppose that there exists $C \in [1, 2)$ such that for any constants $c_i \in \mathbb{R}$, we have

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \right\| \leq C \cdot \max_{1 \leq i \leq k} |c_i| \,.$$

Show that the collection $\{x_i\}$ is linearly independent.

Problem 2. Let $A_1, \ldots, A_n$ be real idempotent matrices of the same dimension. Prove that

$$\dim(\ker(A_1)) + \ldots + \dim(\ker(A_n)) \geq \operatorname{rank}(I - A_1 \cdots A_n)\,.$$

Problem 3. Let A and B be 3×3–matrices with integer entries such that $AB = BA$ and $\det(A) = \det(B) = 0$. Prove that there exist integers a and b such that $\det(A^3+B^3) = a^3+b^3$.

Problem 4. Let A and B be two 3×3–matrices with complex entries such that $A^2 = AB + BA$. Prove that $\det(AB - BA) = 0$.

Problem 5. Let A be an $n \times n$–matrix with real entries such that $A^3 - A^2 - 3A + 2I = 0$. Determine the number of possible values for the determinant of A.

Problem 6. Let A and B be 2×2–matrices with rational entries with $AB = BA$, $\det(A) = -3$ and $\det(A + \sqrt{3}B) = 0$. Compute $\det(A^2 + B^2 - AB)$.

Problem 7. Let A, B, C be real square $n \times n$–matrices such that $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + I$ and C is a symmetric matrix. Is it possible that $n = 2017$?

Problem 8 (μKW)**.** Let A be a real $n \times n$–matrix. For each $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ define a_k as $a_k = \operatorname{rank}(A^k) = \dim(\operatorname{im}(A^k))$.

(a) For each $k \geq 1$ prove that $a_k \leq a_{k-1}$.

(b) For each $k \geq 1$ prove that $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$.

(c) For each $k \geq n$ prove that $a_k = a_n$.

Problem 9. Let A be a 3×2–matrix and B a 2×3–matrix such that

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Find BA.

Problem 10. Let $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ be the set of 2×2-matrices with integer entries and determinant equal to 1.

(a) Do there exist $A, B, C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ such that $A^2 + B^2 = C^2$?

(b) Do there exist $A, B, C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ such that $A^4 + B^4 = C^4$?

Problem 11. Let A and B be two real $n \times n$–matrices such that $\operatorname{trace}(AA^t + BB^t) = \operatorname{trace}(AB + A^tB^t)$. Prove that $A = B^t$.

Problem 12. Let M be an invertible $2n \times 2n$–matrix. If we subdivide M and M^{-1} into $n \times n$–matrices we get

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ and } M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Show that $\det M \cdot \det H = \det A$.

Problem 13. Let G be a finite group of real $n \times n$–matrices $\{M_i\}$ with $1 \leq i \leq r$, where the group operation is given by matrix multiplication. Suppose that $\sum_{i=1}^{r} \operatorname{trace}(M_i) = 0$. Prove that $\sum_{i=1}^{r} M_i$ is the zero matrix.

Problem 14. Let A and B be real 2016×2016–matrices satisfying $A^{2016} = B^{2016} = I$. If $\operatorname{trace}(AB) = 2016$, prove that $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B)$.

Problem 15 (LIMO 2006)**.** Let M be a 3×3 magic square, i.e. a 3×3–matrix where the sum of all numbers in each row, column and each of the two diagonals is the same. Show that for each odd n the matrix M^n is a magic square.

Problem 16. Let A and B be two real $n \times n$–matrices satisfying $AB = BA$ and $A^{2016} = B^{2017} = I$. Prove that $A + B + I$ is invertible.

Problem 17. Let A be a 3×3–matrix with rational entries. Suppose there exists an $n \in \mathbb{N}$ such that $A^n = I$. Show that $A^{12} = I$.

Problem 18. Let A be a $n \times n$–matrix with integer entries. Suppose that

$$p^2 A^{p^2} = q^2 A^{q^2} + r^2 I,$$

where p, q and r are positive integers with r odd and $p^2 = q^2 + r^2$. Prove that $|\det A| = 1$.

Problem 19. Let A be a real $n \times n$–matrix. For every positive integer k we define $A^{[k]}$ as the matrix obtained by raising each element of A to the power k. If $A^k = A^{[k]}$ for $k = 1, 2, \ldots, n+1$ then prove that $A^k = A^{[k]}$ for all $k \geq 1$.

Problem 20 (Putnam 2016)**.** Let S be the set of all 2×2 real matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ whose entries a, b, c, d (in that order) form an arithmetic progression. Find all matrices M in S for which there is some integer $k > 1$ such that M^k is also in S.

Problem 21 (IMC 1997)**.** Let A and B be real $n \times n$–matrices such that $A^2 + B^2 = AB$. Prove that if $BA - AB$ is an invertible matrix then n is divisible by 3.

Problem 22 (Putnam 2014)**.** Let n be a positive integer. What is the largest k for which there exist $n \times n$–matrices $M_1, \ldots, M_k$ and $N_1, \ldots, N_k$ with real entries such that for all i and j, the matrix product $M_i N_j$ has a zero entry somewhere on its diagonal if and only if $i \neq j$?

Problem 23 (Putnam 2016)**.** Let n be a positive integer. Suppose that A, B, and M are $n \times n$–matrices with real entries such that $AM = MB$, and such that A and B have the same characteristic polynomial. Prove that $\det(A - MX) = \det(B - XM)$ for every $n \times n$ matrix X with real entries.

Combinatoriek

Het onderwerp van deze set is combinatoriek. Voor de onderstaande opgaven heb je een grote verscheidenheid aan strategieën, technieken en creativiteit nodig. Het kan heel goed gebeuren dat je bij een opgave vastloopt en echt niet meer weet wat je moet doen. Dit is helemaal niet erg en volstrekt normaal. Het volgende lijstje van strategieën en technieken kan wellicht uitkomst bieden.

- Doe kleine gevallen! Immers als het geval $n = 1$ niet kan, dan is de kans erg groot dat het voor grotere n ook niet gaat lukken.
- Inductie;
- Wil je dingen gaan tellen, probeer het dan eens op twee manieren te tellen of probeer een bijectie te maken of stel bijvoorbeeld een recursie op.
- Extremenprincipe;
- Invariantie;
- Kleuringen;
- Ladenprincipe;
- Vertaal de opgaven naar iets over grafen.

Opgaven

Opgave 1. Op een feest zijn 10 personen wiens leeftijd varieert tussen de 1 en 101. Laat zien dat er twee disjuncte deelverzamelingen van personen zijn, waarbij de som van alle leeftijden hetzelfde is.

Opgave 2. Laat n punten in een rechthoek R gegeven zijn, zodat er geen twee op een lijn parallel aan een van de zijden van R liggen. We willen nu de rechthoek R verdelen in kleinere rechthoeken met zijden parallel aan de zijden van R op zo'n manier dat geen van deze rechthoeken een van de n gegeven punten in zijn inwendige heeft. Bewijs dat we hiervoor R in minstens $n + 1$ kleinere rechthoeken moeten verdelen.

Opgave 3. Een deelverzameling E van de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ heet speciaal als het geen paar van de vorm $\{x, 3x\}$ bevat. Een speciale verzameling E heet superspeciaal als het zoveel mogelijk elementen bevat. Hoeveel elementen zitten er in een superspeciale verzameling, en hoeveel superspeciale verzamelingen zijn er?

Opgave 4. Op hoeveel manieren kan een $2\times n$-tegelpaadje worden bestraat met 1×2-tegels?

Opgave 5. Bewijs de volgende gelijkheid met een combinatorisch argument:

$$\sum_{k=2}^{n} k \cdot \binom{n-2}{k-2} \cdot \binom{n+2}{k} = (n+2) \cdot \binom{2n-1}{n-1}.$$

Opgave 6. Op elk vakje van een schaakbord schrijven we het aantal rechthoeken waarin dit vakje is bevat. Vind de som van al deze getallen.

Opgave 7. Bekijk een convexe n-hoek. Er worden $m > n$ munten over de hoekpunten van deze figuur verdeeld. De volgende stap wordt herhaaldelijk uitgevoerd: Er wordt een hoekpunt gekozen met minstens 2 munten, en de buren van dit hoekpunt krijgen beide een munt van de stapel op dit hoekpunt. Na $k > 0$ van deze stappen zijn we weer in de oorspronkelijke verdeling terug. Bewijs dat k een veelvoud van n is.

Opgave 8. Voor elk positief geheel getal n definiëren we $p(n)$ als het aantal manieren om n als som van positieve gehele getallen te schrijven. Zo geldt bijvoorbeeld $p(4) = 5$, want

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1\,.$$

Verder definiëren we $p(0) = 1$. Bewijs dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $p(n) - p(n-1)$ gelijk is aan het aantal manieren om n te schrijven als som van positieve gehele getallen groter dan 1.

Opgave 9. Voor een convexe n-hoek P_n ($n \geq 8$), zeggen we dat een convexe vierhoek Q een *diagonaal-vierhoek* is van P_n als de hoekpunten van Q hoekpunten zijn van P_n, en zijn zijdes echte diagonalen zijn van P_n, dus geen zijdes van P_n. Bepaal het aantal *diagonaal-vierhoeken* van P_n.

Opgave 10. Er zijn enkele positieve gehele getallen in een rij geschreven. Alice kiest herhaaldelijk aangrenzende getallen x en y zodat geldt dat $x > y$ en x links van y staat, en vervangt het paar (x, y) door $(y + 1, x)$ of $(x - 1, x)$. Bewijs dat Alice dit maar eindig vaak kan doen.

Opgave 11. Bekijk een simpele graaf (dus een graaf zonder lussen of meerdere zijden tussen een paar knopen) met ten minste 4 knopen, zodat elke knoop ten minste graad 3 heeft. Bewijs dat de graaf een cykel van even lengte heeft.

Opgave 12. Voor een geheel getal $m \geq 1$ bekijken we partities van een $2^m \times 2^m$ schaakbord in rechthoeken bestaande uit vakjes van het bord, waarbij elk van de 2^m vakjes in de diagonaal van linksboven naar rechtsonder in zijn eigen 1×1 rechthoek zit. Vind de minimale totale omtrek van de rechthoeken in zo'n partitie.

Opgave 13. Een comité van 3366 filmcritici stemt voor de Oscars. Elke criticus heeft op één acteur en één actrice gestemd. Na het stemmen bleek het zo te zijn dat voor elk geheel getal $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ er een acteur of actrice was waarop precies n keer gestemd was. Bewijs dat er twee critici waren die op dezelfde acteur en actrice hebben gestemd.

Opgave 14. Birgit en Quintijn spelen een spelletje. Quintijn heeft $2n$ nogal vreemde munten. Sommige munten hebben namelijk aan twee kanten een zijde met munt, andere aan twee kanten kop, en sommige aan de ene kant kop, en de andere kant munt. Birgit kan het volgende doen: ze zegt een getal k en munt of kop, en vervolgens kiest Quintijn k munten die met de door Birgit genoemde kant naar boven liggen en draait deze om (we nemen aan dat Birgit haar k zodanig kiest dat Quintijn dit wel kan doen). Birgit ziet niet welke munten Quintijn kiest, maar ziet alleen het resultaat van het omdraaien, dus hoeveel munten er nu met munt naar boven liggen en hoeveel met kop. Het spel eindigt als Birgit van alle munten weet van welk van de drie soorten deze zijn. Birgit's score is de som van alle k in haar zetten. Wat is de minimale score van Birgit?

Opgave 15. Zij n en k positieve gehele getallen. Bekijk een groep van k mensen, zodanig dat voor elke groep van n mensen, er een $n+1$'de persoon is die al die n mensen kent. (Als A B kent, kent B A ook.)
a) Bewijs dat er voor $k = 2n+1$ iemand in de groep is die alle anderen kent.
b) Geef voor $k = 2n+2$ een voorbeeld van zo'n groep waarin er niemand is die alle anderen kent.

Opgave 16. Twee personen spelen het volgende spel met getallen. Het begingetal is 2016^{2016}, en de spelers doen om de beurt een zet. Elke zet bestaat uit ofwel het verminderen van het huidige getal met een getal x met $1 \leq x \leq 2015$, ofwel het delen van huidige getal door 2016, waarbij we naar beneden afronden indien nodig. De speler die als eerste een niet-positief getal maakt wint. Welke speler heeft een winnende strategie?

Opgave 17. Het getal 1 wordt op een krijtbord geschreven. Het volgende rijtje getallen wordt als volgt gemaakt: bij elke stap wordt het getal a vervangen door de getallen $a-1$ en $a+1$. Als het getal 0 voorkomt, wordt het onmiddellijk weggeveegd. Dus na 0 stappen staat er 1, na 1 stap 2, na 2 stappen 1,3, na 3 stappen 2,2,4, enzovoorts. Hoeveel getallen staan er na n stappen op het bord?

Opgave 18. Een groep buitenaardse wezens heeft 3 geslachten: Naast mannelijk en vrouwelijk is er een voor ons onbekend geslacht X. Een getrouwd drietal bestaat uit een alien van elk geslacht, die paarsgewijs van elkaar houden. Een bijzondere eigenschap van dit ras is dat gevoelens altijd wederzijds zijn: Als A houdt van B, dan houdt B ook van A. De aliens sturen een expeditie naar een nieuwe planeet, met n leden van elk geslacht. Het is bekend dat elk expeditielid houdt van minstens k expeditieleden van elk van de andere twee geslachten. Nu is het de taak om zoveel mogelijk drietallen te trouwen, zodat de kolonie genoeg nakomelingen krijgt om te blijven voortbestaan.
a) Laat zien dat indien n even is en $k = \frac{n}{2}$ geldt, het niet altijd mogelijk is om ook maar één getrouwd drietal te maken.
b) Laat zien dat indien $k \geq \frac{3n}{4}$ geldt, het altijd mogelijk is om n disjuncte getrouwde drietallen te maken, waarmee alle expeditieleden trouwen.

Opgave 19. We hebben een 8×8-bord en 3×1 en 1×3-domino's die 3 vakjes bedekken. Zulke domino's kunnen parallel aan de zijden van het bord heen en weer bewegen, maar alleen wanneer de vakjes waarover bewogen kan worden, vrij zijn. Een positie heet stabiel wanneer er geen domino's zijn die bewogen kunnen worden.
a) Vind het kleinste aantal bedekte vakjes dat nodig is voor een stabiele positie.
b) Bewijs dat er een stabiele positie bestaat met slechts 1 vakje onbedekt.
c) Vind alle vakjes die onbedekt kunnen zijn in een mogelijke stabiele positie voor deel b) .

Opgave 20. Twee spelers, een bouwer en een verwoester, spelen het volgende spel. De bouwer begint en de spelers kiezen omstebeurt een element uit de verzameling $\{0, 1, \ldots, 10\}$, waarbij geen enkel element twee keer gekozen mag worden. De bouwer probeert een rekenkundige rij van lengte 4 te vormen, de verwoester probeert dit te voorkomen. De bouwer wint als 4 van de 6 getallen die hij kiest samen een rekenkundige rij vormen, anders wint de verwoester. Wie heeft er een winnende strategie?

Opgave 21. In een straat zijn n parkeerplekken achter elkaar. Er komen n auto's achtereenvolgend de straat binnen rijden en iedere automobilist heeft een voorkeur voor één van deze n plekken. De eerste bestuurder parkeert op zijn favoriete plek. De tweede bestuurder ook, tenzij die plek bezet is, dan pakt hij de eerstvolgende vrije plek. Als zo'n plek niet bestaat dan rijdt hij boos de straat uit. Dit herhaalt zich met automobilisten 3 tot en met n. De bestuurders kunnen op n^n manieren hun voorkeursplekken kiezen. Op hoeveel van die manieren rijdt geen enkele bestuurder boos de straat uit?

Opgave 22. Er zijn $2n$ mensen in een kamer, waarbij elk paar bevriend is of niet bevriend is. Twee spelers spelen een spel waarin ze alternerend een persoon uit de kamer kiezen die nog niet gekozen is, en bevriend is met de vorige persoon die gekozen is. De laatste speler die nog een persoon kan kiezen wint. De eerste speler mag in zijn eerste beurt elke persoon kiezen. Laat zien dat de tweede speler een winnende strategie heeft dan en slechts dan als de $2n$ mensen verdeeld kunnen worden in n disjuncte paren van bevriende mensen.