Week 0: Introductie

Opgave 1 *Een $n \times n$-matrix heeft alle elementen gelijk aan 0 of 1. Vind het aantal matrices met een even aantal enen in iedere rij en kolom.*

Opgave 2 *We kleuren de getallen $\{0, 1, 2, \ldots\}$ met drie verschillende kleuren. Bestaat er altijd een tweetal gehele getallen $a, b \geq 0$ niet beide 0 en niet beide 2 zodat $a + b$ en $a \cdot b$ dezelfde kleur hebben?*

Opgave 3 *Toon aan dat van 5 al dan niet verschillende natuurlijke getallen men er altijd 3 van kan kiezen zodat hun som deelbaar is door 3.*

Opgave 4 *Stel $f(x) = x^3 - x$. Toon aan dat de verzameling van reële A zodat voor een bepaalde reële x geldt dat $f(x + A) = f(x)$ gelijk is aan het interval $[-2, 2]$.*

Opgave 5 *Vind het kleinste natuurlijke getal n zodat we n reële getallen kunnen vinden uit het interval $(-1, 1)$ waarvan de som 0 is en hun kwadraten optellen tot 20.*

Opgave 6 *Een rij getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ voldoet aan*

(i) $a_1 = \frac{1}{2}$;

(ii) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$ *voor* $n \geq 1$.

Bepaal de waarde van a_n.

Opgave 7 *Hoeveel permutaties π van $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$ zijn er zo dat $k + \pi(k)$ een tweemacht is voor alle $k \in X$?*

Opgave 8 *Wat is het maximum aantal termen in een meetkundige rij, met rede groter dan 1, gegeven dat alle termen uit de verzameling natuurlijke getallen tussen 100 en 1000 komen?*

Opgave 9 *Het jaartal 1978 had de eigenschap dat 19+78=97. Met andere woorden: de som van het getal gevormd door de eerste twee cijfers en het getal gevormd door de laatste twee cijfers, is het getal gevormd door de middenste twee cijfers. Bepaal het eerste jaartal na 1978 met dezelfde eigenschap.*

Opgave 10 *Zij n een samengesteld getal. Bewijs dat er natuurlijke getallen x, y en z bestaan met $n = xy + yz + zx + 1$.*

Opgave 11 *Bepaal alle 2×2-matrices A die aan de volgende eisen voldoen:*

(i) de coëfficiënten van A zijn priemgetallen;

(ii) er bestaat een 2×2-matrix B met gehele coëfficiënten, zo dat $A = B^2$ en dat de determinant van B een priemgetal is.

Opgave 12 *Een getal van 70 cijfers waarin ieder van de getallen 1,2,3,...,7 precies tien keer voorkomt noemen we hebzuchtig. Bewijs dat een hebzuchtig getal nooit een deler is van een ander hebzuchtig getal.*

Opgave 13 *Op een feestje zijn $n \geq 4$ mensen. Van elk viertal mensen zijn er 3 die elkaar allemaal kennen of 3 die elkaar allemaal niet kennen. Bewijs dat de mensen op het feestje in twee zalen kunnen worden verdeeld, zodat in de ene zaal iedereen elkaar kent en in de andere zaal niemand elkaar kent.*

Opgave 14 *In een land is elk tweetal steden door een directe spoorwegverbinding verbonden. Voor elk van deze verbindingen heeft een kaartje een andere prijs. Twee toeristen maken elk een rondreis door het land door van deze spoorwegverbindingen gebruik te maken. De eerste toerist kiest steeds als volgende stad de stad uit waar hij nog niet geweest is en op dat moment het goedkoopst naar toe kan. De tweede toerist gaat juist telkens voor een zo duur mogelijk kaartje. Op een gegeven moment hebben beide toeristen alle steden bezocht. Beide toeristen eindigen dus in een andere stad dan ze beginnen. Bewijs dat de eerste toerist niet meer geld kwijt is dan de tweede toerist.*