Week 1: Inductie (set 2)

Opgave 1. *Aan een tennistoernooi doen n mensen mee. Ieder tweetal mensen speelt precies een keer tegen elkaar en iedere wedstrijd wordt door precies één van de spelers gewonnen. Bewijs dat we spelers kunnen nummeren van 1 tot en met n zo dat speler k van speler $k+1$ wint voor alle $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Opgave 2. *Bewijs dat je een $2^n \times 2^n$-bord waarvan een hoekvakje is verwijderd kan betegelen met enkel L-trominos (drie eenheidsvierkantje aan elkaar in de vorm van een L).*

Opgave 3. *Zij n een natuurlijk getal. Bereken de som $\sum \frac{1}{xy}$ over alle paren (x, y) van gehele getallen die voldoen aan $x, y \leq n$ en $x + y > n$.*

Opgave 4. *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie die voldoet aan $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

voor alle n-tallen $x_1, \ldots, x_n$ van reële getallen.

Opgave 5. *Bekijk een groep van n mensen waarin iedereen bevriend is met minstens de helft van de andere mensen. Bewijs dat we deze mensen aan een ronde tafel kunnen zetten zo dat iedereen tussen twee vrienden zit.*

Opgave 6. *Bewijs dat voor alle $n \geq 2$ geldt dat $(1 + x + x^2)^n$ een even coëfficiënt heeft.*

Opgave 7. *Bewijs dat voor niet-negatieve getallen $a_1, \ldots, a_n$ geldt dat*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n})^n.$$

Opgave 8. *Laat $a, b, p_1, \ldots, p_n$ reële getallen zijn met $a \neq b$. Definieer $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x) \ldots (p_n - x)$. Bewijs dat*

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & a & a & \ldots & a & a \\ b & p_2 & a & \ldots & a & a \\ b & b & p_3 & \ldots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \ldots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & \ldots & b & p_n \end{pmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Opgave 9. *Op een feest met $n \geq 4$ mensen blijkt het volgende te gelden: voor alle viertallen mensen op het feest geldt dat er drie zijn die elkaar allemaal kennen of er zijn drie mensen die elkaar niet kennen. Bewijs dat we de feestbeesten over twee zalen kunnen verdelen zo dat in de ene zaal iedereen elkaar kent en iedereen in de andere zaal elkaar niet kent.*

Opgave 10. *Gegeven zijn niet-negatieve a_i voor $1 \leq i \leq n$ die voldoen aan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Bewijs dat*

$$(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \ldots (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) \geq 4^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n.$$