Week 11: Lineaire combinaties & forceer de ontbinding

Opgave 1 *Van een rechthoekige legpuzzel van m bij n stukjes is bekend dat het aantal randstukjes (inclusief de vier hoekstukjes) precies 8% is van het totaal aantal stukjes.*
Bepaal de mogelijkheden voor het aantal stukjes van de puzzel.

Opgave 2 *Gegeven zijn* $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$*. Volgens de stelling van Bézout bestaan er gehele x_0 en y_0 zo dat $ax_0 + by_0 = 1$. Bewijs dat er voor iedere oplossing in gehele getallen van $ax + by = 1$ er een gehele n bestaat zo dat*

$$x = x_0 + bn \quad \text{en } y = y_0 - an.$$

Opgave 3 *Gegeven is een reële α. Vind alle continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die voldoen aan*

$$\int_0^1 xf(x)\ dx = \frac{\alpha}{3};$$
$$\int_0^1 f(x)^2\ dx = \frac{\alpha^2}{3}.$$

Opgave 4 *Op een krijtbord staan een aantal getallen. Per stap mag je twee getallen a en b die op het bord staan kiezen en deze getallen vervangen door het getal $ab + a + b$. We voeren stappen uit totdat dat niet meer kan. Als je begint met de getallen $1, 2, 3, \ldots, 10$, wat zijn dan de mogelijkheden voor het laatste getal?*

Opgave 5 *Zij n een natuurlijk getal. Bepaal het aantal paren (a, b) van natuurlijke getallen dat voldoet aan $\frac{ab}{a+b} = n$.*

Opgave 6 *Op een whiteboard staan een aantal getallen. We kunnen steeds twee getallen a en b op het bord vervangen door $2ab - a - b + 1$. We doen dit tot er slechts één getal op het bord over is.*

a) Wat zijn de mogelijkheden voor dat laatste getal als we beginnen met $\frac{49}{1}, \frac{49}{2}, \ldots, \frac{49}{97}$?

b) En wat als we beginnen met $\frac{1}{2016}, \frac{2}{2016}, \ldots, \frac{2015}{2016}$?

Opgave 7 *Bewijs dat er hoogstens één continue functie $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in [0, 1]$ geldt*

$$f(x, y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(u, v)\ du\ dv.$$

Opgave 8 *Gegeven zijn reële $x_1, \ldots, x_n > -1$ met $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$. Prove that $\sum_{i=1}^n x_i \le \frac{n}{3}$.*

Opgave 9 *Bepaal alle gehele getallen $n \ge 2$ met de volgende eigenschap: voor alle positieve gehele getallen a en b met $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, geldt $a \mid b$ of $b \mid a$.*

Opgave 10 *Zij A een vierkante matrix over de complexe getallen. Bewijs dat er hoogstens één manier is om A te schrijven als de som van een commuterende diagonale en nilponte matrix.*
NB: uit het bestaan van de Jordan normaalvorm volgt dat iedere matrix daadwerkelijk zo te schrijven valt, maar dat hoef je nu niet te bewijzen.

Opgave 11 *Zij X een stochast met als uitkomst een niet-negatieve geheel getal, zo dat voldaan wordt aan $E[X] = 1$, $E[X^2] = 2$ en $E[X^3] = 5$. Bepaal de kleinst mogelijk kans op de situatie $X = 0$.*

Opgave 12 *Bewijs dat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1 + x^{2k+2}}{(1 - x^{2k+2})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(1 - x^{k+1})^2}$$

voor alle $x \in (-1, 1)$.

Opgave 13 *Laat A en B reële $n \times n$-matrices zijn die voldoen aan $A^2 + B^2 = AB$. Bewijs dat als $AB - BA$ inverteerbaar is dan is 3 een deler van n.*

Opgave 14 *Bekijk continue functies $f, g : [0,1] \to (0,\infty)$ en $K : [0,1]^2 \to (0,\infty)$ zo dat voor alle $x \in [0,1]$ voldaan is aan*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 K(x,y)g(y)\ dy; \\ g(x) &= \int_0^1 K(x,y)f(y)\ dy. \end{aligned}$$

Bewijs dat $f = g$.

Opgave 15 *Laat zien dat er bijectieve functie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bestaat met*

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n)$$

voor alle m en n in $\mathbb{N}_0$.