Week 14: polynomen van matrices (Set II)

- Een vector $v \neq 0$ en een getal λ zijn respectievelijk een eigenvector en een eigenwaarde van een vierkante matrix A als geldt dat $Av = \lambda v$.
- Eigenwaarden zijn precies de nulpunten van het karakteristieke polynoom p_A.
- Er kunnen meerdere eigenvectoren bij een eigenwaarde zijn, maar het maximale aantal lineair onafhankelijke is hoogstens de multipliciteit van de eigenwaarde als nulpunt van p_A.
- De stelling van Cayley-Hamilton zegt dat het karakteristieke polynoom p_A van een matrix A voldoet aan $p_A(A) = 0$.
- Alle polynomen P met $P(A)$ vormen een ideaal I en aangezien $\mathbb{C}[X]$ een hoofdideaaldomein is, bestaat er een uniek monisch polynoom m_A met $I = (m_A)$. Dit is het minimumpolynoom.
- Als de elementen van je matrix A leven in een lichaam $k \subseteq \mathbb{C}$, dan geldt $m_A \in k[X]$.
- Het polynoom m_A deelt het karakteristieke polynoom p_A. Bovendien is ieder nulpunt van p_A, dus elke eigenwaarde, ook een nulpunt van m_A.
- Vind een polynoom waar je matrix een 'nulpunt' van is. Daaruit volgen alle eigenwaarden! Kan je dat niet meteen, ga dan gewoon machten uitdrukken in dingen die je al weet.
- Een $n \times n$-matrix is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als er n lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn.
- Er zijn n lineair onafhankelijke eigenvectoren voor een $n \times n$-matrix als er voor alle eigenwaarden met multiplictiteit k er k lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn.
- Een matrix is diagonaliseerbaar precies als het minimumpolynoom splitst in verschillende lineaire factoren en dus geen dubbele nulpunten heeft.

Opgaven

Opgave 1 *Bewijs dat de volgende uitspraken over een vierkante $n \times n$-matrix A equivalent zijn:*

(i) *er bestaat een k met $A^k = 0$;*

(ii) $A^n = 0$*;*

(iii) *alle eigenwaarden van A zijn nul.*

We zeggen in dit geval dat A nilpotent is.

Opgave 2 *Zij A een reële 2×2-matix die voldoet aan $A^5 = I$. Wat zijn de mogelijke combinaties van $\det A$ en $\operatorname{Sp} A$?*

Opgave 3 *Zij A een 3×3-matrix met $p_A(t) = t^3 + at + b$. Druk p_{A^2} uit in a en b.*

Opgave 4 *Zij A een $n \times n$-matrix met $A^2 = I$. Bewijs dat* $\operatorname{Rg}(A + I) + \operatorname{Rg}(A - I) = n$.

Opgave 5 *Beschouw een reële 2×2-matrix A met niet-negatieve determinant. Laat zien dat*

$$\det(A^n + I_2) + \det(A^n - I_2) \geq \frac{1}{2^{n-2}} \left(\det(A) + 1\right)^n .$$

Opgave 6 *Een vierkante matrix X is gedefinieerd door $X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$ en op de overige plekken alleen maar nullen. Definieer $Y = aI + bX + cX^2$. Bewijs dat $Y^{2004} = 0$ impliceert dat $Y = 0$.*

Opgave 7 *Laat zien dat als voor een 3×3-matrix A met elementen in $\mathbb{Q}$ geldt dat $A^8 = I_3$, dan geldt ook $A^4 = I_2$.*

Opgave 8 *Bestaat er een reële 3×3-matrix A zo dat $\operatorname{Sp} A = 0$ en $A^2 + A^t = I$?*

Opgave 9 *Zij A een 2×2-matrix met gehele elementen zo dat er een gehele $n \geq 1$ bestaat met $\operatorname{ggd}(n, 6) = 1$ en $A^n = I_2$. Laat zien dat $A = I_2$.*

Opgave 10 *Laat A en B twee 2×2-matrices zijn, beiden met determinant gelijk aan 1. Bewijs dat*

$$\operatorname{Sp}(AB) + \operatorname{Sp}(AB^{-1}) = \operatorname{Sp} A \operatorname{Sp} B.$$

Opgave 11 *Zij A een $n \times n$-matrix met gehele elementen. Stel dat*

$$p^2 A^{p^2} = q^2 A^{q^2} + r^2 I_n$$

waar I_n de $n \times n$-identiteitsmatrix is en p, q en r natuurlijke getallen met r oneven en $p^2 = q^2 + r^2$. Bewijs dat $|\det A| = 1$.

Opgave 12 *Zij A een reële $n \times n$-matrix. Voor ieder natuurlijk getal k definiëren we $A^{[k]}$ als de matrix verkregen door ieder element van A tot de macht k te verheffen. Bewijs dat als $A^k = A^{[k]}$ voor $k = 1, 2, \ldots, n+1$ dat dan $A^k = A^{[k]}$ geldt voor alle $k \geq 1$.*