Week 20: Het nut van integreren (set 1)

Deze set gaat over het nut van integreren. Om het nut van integreren te kunnen begrijpen moet je eerst kunnen integreren. We frissen wat technieken op.

Partieel integreren

Partieel integreren is het equivalent van de productregel. We nemen aan dat f en g differentieerbare functies zijn en dat $a, b \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx.$$

Voorbeeldopgave 1 *Bepaal de primitieve van* $x\cos(x)$.

We zien hier het product van twee functies. Om de uitdrukking eenvoudiger te maken gaan we de x differentiëren. We nemen dus $f(x) = x$ en voor $g(x)$ de primitieve van $\cos(x)$, i.e. $g(x) = \sin(x)$. Dan vinden we

$$\int x\cos(x)\, dx = x\sin(x) - \int \sin x\, dx = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

Als je een functie als $\exp(x)$ of een goniometrische functie tegenkomt in een product, dan moet je altijd overwegen om partieel te integreren. Ook integralen van de form $\int x \cdot f(x)\, dx$ kun je vaak oplossen door partieel te integreren.

Soms kun je ook partieel integreren door een functie als het product van zichzelf met 1 te beschouwen.

Voorbeeldopgave 2 *Bepaal de primitieve van* $\log(x)$.

We nemen $f(x) = \log(x)$ en $g(x) = x$ en vinden

$$\int \log(x)\, dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\log(x) - x + C.$$

Substitutie

Het equivalent van de kettingregel is integratie door substitutie. Stel dat f een continue functie is en $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ strikt stijgend, surjectief en differentieerbaar, dan geldt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Voorbeeldopgave 3 *Bepaal* $\int_0^2 xe^{x^2}\, dx$.

Hier gaan we $t = x^2$ substitueren en door aan beide kanten de (formele) operator d toe te passen krijgen we $dt = 2x\,dx$ (de regel is dat $d(f(x)) = f'(x)\,dx$). We krijgen

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int_0^4 \tfrac{1}{2}e^y\,dy = \frac{e^4-1}{2}.$$

Een belangrijke substitutie om te onthouden is de Weierstraß-substitutie. Je hoeft eigenlijk alleen te onthouden dat je $t = \tan(\frac{x}{2})$ moet substitueren. Je gebruikt deze substitutie om integralen die bestaan uit polynomiale uitdrukkingen in $\sin(x)$ en $\cos(x)$ op te lossen. Je krijgt een rationale functie in t en door breuksplitsing toe te passen kun je de integraal oplossen.

Opgaven

Opgave 1 *Bereken*

$$\int_{-2016}^{2016} 2016\,dx.$$

Opgave 2 *Bepaal*

$$\int x^2\sin(x)\,dx.$$

Opgave 3 *Bereken*

$$\int_0^\infty x^{2016}e^{-x}\,dx.$$

Opgave 4 *Bereken*

$$\int_0^\infty x^{2016+\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx.$$

Opgave 5 *Ga voor de Weierstraß-substitutie na hoe je* $\sin(x), \cos(x)$ *en* dx *uitdrukt in termen van* t *en* dt*. Bedenk ook wat er met de integratiegrenzen gebeurt. Bedenk vervolgens hoe je de primitieve van een rationale functie bepaalt. Pas deze kennis toe om de volgende integraal te berekenen:*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx.$$

Opgave 6 *Bereken*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(x)\,dx.$$

Opgave 7 *Bereken*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Opgave 8 *Bepaal*

$$\int \frac{2x\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx.$$

Opgave 9 *Zij f een continue functie. Bepaal*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx.$$

Opgave 10 (IMC 2010-1) *Stel dat $0 < a < b$. Laat zien dat*

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geqslant e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

Opgave 11 (IMC 2010-2) *Bereken de volgende oneindige som.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots$$