Week 25: Determinanten

Deze week gaan we het hebben over determinanten. Hier volgen weer een aantal tips voor de opgaven.

- Bekijk kleine gevallen. Soms kun je de determinant van een $n \times n$-matrix raden door een patroon te zien van $n = 1, 2, 3, \dots$, et cetera.
- Veeg de matrix. Determinanten gedragen zich niet te slecht onder veegoperaties. Je mag veelvouden van een rij of kolom van een andere rij of kolom aftrekken en er verandert niks.
- Soms kun je de determinant inductief uitrekenen door te ontwikkelen naar een kolom of rij. Deze aanpak heeft vooral zin in de situatie dat de matrix spaars is (i.e. veel nullen bevat). Je kunt deze aanpak ook combineren met de twee tips hierboven.
- De determinant is multiplicatief, maar niet additief. Het is wel multilineair in de kolommen en rijen.
- Misschien herinner je je nog wel een formule met permutaties en tekens. Deze formule is zelden handig om een determinant uit te rekenen.
- Soms kun je een veelvoorkomend getal in de matrix vervangen door een monoom en de determinant beschouwen als een polynoom. Je kunt dan de afgeleide vrij makkelijk uitrekenen, zie ook de set "Het nut van differentiëren", door de determinant te berekenen van kleinere matrices.

Voorbeeldopgave 1 (MOAWOA 2011) *Zij n een natuurlijk getal en definieer A als de $n \times n$-matrix met $A_{nn} = n^2$, $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = i + 1$ en $A_{i,i} = i^2 + 1$ voor alle $1 \leq i < n$. Op alle andere plekken staan nullen. Bereken* $\det A$.

We bespreken twee type oplossingen. De eerste oplossingsaanpak ligt het meest voor de hand en o.a. door Raymond bedacht. De laatste oplossing is zeer magisch en ondoorgrondbaar; die is dus door Julian bedacht.

Oplossing 1: Er staat een n in de opgave, we gaan inductie doen. Voor $n = 1$, krijgen we de matrix 1 en vinden we $\det A_1 = 1$. Voor $n = 2, 3, 4$ krijgen we

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

dus $\det A_2 = 4$, $\det A_3 = 36$ en $\det A_4 = 576$. Misschien zie je nu toevallig dat $\det A_n = (n!)^2$. Een andere manier waarop je hierachter had kunnen komen is door na te gaan hoe je bijvoorbeeld $\det A_4$ het handigste uitrekent. Dit gaat het gemakkelijkst door te halen uit de laatste kolom en onderste rij. Je krijgt dan

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \right| = 4 \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right| = 16 \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Nu halen we de laatste kolom van de voorlaatste kolom af en ontwikkelen we naar de laatste rij:

$$16 \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \right|$$

en dat is de matrix A_3. Dus geldt $\det A_4 = 4^2 \cdot (3!)^2 = (4!)^2$. Deze aanpak laat zich generaliseren om met inductie te laten zien dat daadwerkelijk geldt dat $\det A_n = (n!)^2$.

Bovenstaande oplossing is extreem efficiënt en het valt natuurlijk nooit te verwachten dat je zelf altijd de snelste oplossing vindt. We beschrijven nog een veeg- en ontwikkeloplossing die net wat meer stappen heeft, maar wel een mooie eigenschap van determinanten laat zien.

Oplossing 1b: We ontwikkelen de matrix A_4 naar de onderste rij. Je krijgt dan

$$-4 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right| + 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \right| .$$

Je ziet dat in de eerste 3×3-matrix er alleen een 4 staat in de laatste kolom en dat die term dus gelijk is aan

$$-16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| .$$

Nu zijn de twee overgebleven matrices bijna gelijk aan A_2 en A_3. Het idee voor de inductie is geboren. Beschouw $B_n = A_n + \delta_{n,n}$, waarbij $\delta_{n,n}$ de matrix is met een 1 rechtsonder en voor de rest alleen maar nullen. Dan vinden we dus dat $\det A_4 = -16 \det A_2 + 16 \det B_3$.

De matrices A_n en B_n verschillen slechts in een rij (of kolom), want ze verschillen op precies een plek. Zo vinden we door de multilineariteit van de determinant dat

$$\det B_4 = \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 17 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = \det A_4 + \det B_3.$$

Waarbij de laatste matrix ontwikkeld hebben naar de laatste rij of kolom. Op deze manier kunnen we $\det A_n$ voor algemene n uitdrukken in $\det A_k$ voor $k < n$ en met inductie bewijzen we wederom dat $\det A_n = (n!)^2$.

Oplossing 2: Bekijk de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} .$$

Dan zie je enerzijds dat $A = BB^{\mathrm{t}}$ en anderzijds dat $\det B = n!$. Hieruit volgt $\det A = \det B \cdot \det B^{\mathrm{t}} = \det B^2 = (n!)^2$.

Opgaven

Opgave 1 *Zij A een vierkante matrix met gehele coëfficiënten, zodat de som van iedere kolom gelijk is aan k. Bewijs dat $k \mid \det A$.*

Opgave 2 (Putnam 2014) *Zij A de $n \times n$-matrix met als element in de i-de rij en j-de kolom*

$$\frac{1}{\min(i,j)}$$

voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Bepaal $\det(A)$.

Opgave 3 (IMC 2002) *Bereken de determinant van de $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$,*

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & \textit{als } i \neq j; \\ 2 & \textit{als } i = j. \end{cases}$$

Opgave 4 *Bepaal de determinant van de $n \times n$-matrix X die als volgt gedefinieerd is: het element $X_{i,j}$ voor $1 \leq i, j \leq n$ is gelijk aan het unieke element in $\{1, 2, \ldots, n\}$ dat voldoet aan*

$$X_{i,j} \equiv i + j - 1 \mod n.$$

Opgave 5 (PUMA 2012) *Zij $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ met*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{als } j - i + 1 < 0; \\ \frac{1}{(j-i+1)!} & \textit{anders.} \end{cases}$$

Bepaal $\det(A)$.

Opgave 6 (IMC 1996) *Definieer voor $j = 0, 1, \ldots, n$, $a_j := a_0 + jd$ voor vaste a_0 en d. Bekijk*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

Bereken $\det A$.

Opgave 7 (MOAWOA 2012) *Gegeven is een $n \in \mathbb{N}$. Definieer een afbeelding π van de complexe $n \times n$-matrices naar de reële $2n \times 2n$-matrices door*

$$\pi(M) = \begin{pmatrix} Re(M_{11}) & -Im(M_{11}) & \cdots & Re(M_{1n}) & -Im(M_{1n}) \\ Im(M_{11}) & Re(M_{11}) & \cdots & Im(M_{1n}) & Re(M_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Re(M_{n1}) & -Im(M_{n1}) & \cdots & Re(M_{nn}) & -Im(M_{nn}) \\ Im(M_{n1}) & Re(M_{n1}) & \cdots & Im(M_{nn}) & Re(M_{nn}) \end{pmatrix}$$

Bewijs dat $\det \pi(M) = |\det M|^2$.

Opgave 8 (Putnam 1984) *Zij n een positief geheel getal. Laat a, b en x reële getallen zijn met $a \neq b$ en definieer M_n als de $2n \times 2n$-matrix met*

$$m_{ij} = \begin{cases} x & \textit{als } i = j; \\ a & \textit{als } i \neq j \textit{ en } i + j \textit{ even is;} \\ b & \textit{als } i \neq j \textit{ en } i + j \textit{ oneven is.} \end{cases}$$

Druk $\lim_{x \to a} \frac{\det M_n}{(x-a)^{2n-2}}$ *uit als een polynoom in a, b en n.*

Opgave 9 (Putnam 1987) *Laat $a, b, p_1, p_2, \ldots, p_n$ reële getallen zijn met $a \neq b$. Definieer $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x) \ldots (p_n - x)$. Bewijs dat*

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & a & a & a & \ldots & a & a \\ b & p_2 & b & b & \ldots & a & a \\ b & b & p_3 & b & \ldots & a & a \\ b & b & b & p_4 & \ldots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \ldots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \ldots & a & p_n \end{pmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Opgave 10 (IMC 2007) *Zij $n > 1$ een oneven natuurlijk getal en $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de $n \times n$-matrix met*

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \textit{als } i = j; \\ 1 & \textit{als } i - j = \pm 2 \mod n; \\ 0 & \textit{in de andere gevallen.} \end{cases}$$

Opgave 11 (IMC 2008) *Zij n een positive geheel getal en bekijk de matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ met $a_{ij} = 1$ als $i + j$ priem is en $a_{ij} = 0$ in alle andere gevallen. Bewijs dat de absolute waarde van de determinant een kwadraat is van een natuurlijk getal.*