Opgaven week 26: recursie set I

Opgave 1. *Zij n een natuurlijk getal. Laat S_n en T_n het aantal manieren zijn om een $2 \times n$-pad te betegelen met 2×1-tegels, danwel een $1 \times n$-pad te betegelen met 2×1- en 1×1-tegels. Het is toegestaan om de tegels te draaien.*

Bewijs dat $S_n = T_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en laat zien dat dit bovendien gelijk is aan F_n, waar F_n de rij van Fibonnaci is met $F_0 = F_1 = 1$.

Opgave 2. *Gegeven $a_n = (n^2 + 1)3^n$, vind een recursie $a_n + pa_{n+1} + qa_{n+2} + ra_{n+3} = 0$.*

Opgave 3. *Een rij gehele getallen is gedefinieerd door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ en*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$$

voor $n \geq 3$. Bepaal a_{2015}.

Opgave 4. *Definieer a_n door $a_0 = \alpha$, $a_{n+1} = 2a_n - n^2$. Voor welke α bestaat de rij uit enkel positieve termen?*

Opgave 5. *Vind een directe formule voor de elementen van de rij $(x_n)_{n \geq 0}$ gedefinieerd door $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ en*

$$(n+1)(n+2)x_n = 4(n+1)(n+3)x_{n-1} - 4(n+2)(n+3)x_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2.$$

Opgave 6. *Voor alle positieve gehele getallen m en n laat $f(m,n)$ het aantal rijtjes $(x_1, \ldots, x_n)$ van gehele (niet noodzakelijk positieve!) getallen zijn zodat $|x_1| + \ldots + |x_n| \leq m$. Laat zien dat $f(m,n) = f(n,m)$.*

Opgave 7. *Vind alle functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan*

$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x$$

voor alle $x \in \mathbb{Z}$.

Opgave 8. *Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een onbegrensde en strikt stijgende rij van positieve reële getallen zo dat het rekenkundig gemiddelde van de vier termen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ ook een element van de rij is. Bewijs dat de rij $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ convergeert en vind de mogelijke waarden van de limiet.*

Opgave 9. *Gegeven is een positief geheel getal m en $n = 2^m - 1$. De $n \times n$-matrix $A = (a_{ij})$ over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is gegeven door $a_{i,j} = 1$ als $|i - j| = 1$ en $a_{i,j} = 0$ anders. Laat zien dat A nilpotent is.*

Opgave 10. *Zij $n \geq 1$ een geheel getal. In dorp X wonen n meisjes en n jongens; elk meisje hier kent elke jongen. In dorp Y wonen n meisjes, g_1, g_2, $\ldots$, g_n, en $2n - 1$ jongens, b_1, b_2, $\ldots$, b_{2n-1}. Voor $i = 1, 2, \ldots, n$ geldt dat meisje g_i jongens b_1, b_2, $\ldots$, b_{2i-1} kent en geen andere jongens. Zij r een geheel getal met $1 \leq r \leq n$. In elk van de dorpen wordt een feest gehouden waarbij r meisjes uit het betreffende dorp en r jongens uit hetzelfde dorp geacht worden met elkaar te dansen in r dansparen. Echter, elk meisje wil alleen dansen met een jongen die ze kent. Noem $X(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp X; noem $Y(r)$ het aantal manieren waarop we r dansparen kunnen kiezen in dorp Y.*
Bewijs dat $X(r) = Y(r)$ voor $r = 1, 2, \ldots, n$.