Week 9: Lineaire algebra I (set II)

Determinant van een som

Men komt wel eens een uitdrukking als $\det(A+B)$ tegen. Als A en B slechts in een enkele rij of kolom verschillen, valt daar nog wat van te maken (Ga even zelf na!), maar in alle andere gevallen valt er niet veel anders te doen dan te hopen dat A (of anders B) inverteerbaar is, want dan kan je het herschrijven naar $\det(I + A^{-1}B)$. De eerste opgave laat zien waarom dat wel leuk is.

Matrixblokken

Bekijk de volgende nuttige stelling.

Stelling 1. *Laat A en B vierkante matrices van dezelfde dimensie zijn. Dan geldt*

$$p_{AB} = p_{BA}.$$

Het bewijs bevat een interessante truc die wel vaker van pas kan komen.

Bewijs. Bekijk de volgende identiteit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BA & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Het is snel gecontroleerd dat de twee buitenste matrices aan de rechterkant elkaars inverse zijn. Daaruit volgt dat $x^n p_{AB}(x) = x^n p_{BA}(x)$. $\square$

Afgezien van dat we de matrices uitbreiden, is het vooral van belang om op te merken dat we die nieuwe matrices niet helemaal uitschrijven in coëfficiënten, maar wel opdelen in blokken. Het fijne daarvan is dat (als je blokken in ieder geval de juiste grootte hebben) je daar heel overzichtelijk mee kan vermenigvuldigen. Merk wel op dat de volgorde van de blokken als je zo'n vermenigvuldiging uitwerkt erg belangrijk! Let ook op als je andere dingen gaat doen dan vermenigvuldigen: zo geldt voor een $2n \times 2n$-matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

over het algemeen niet dat de determinant gelijk is aan $\det A \det D - \det B \det C$. Als $B = 0$ of $C = 0$ geldt het bijvoorbeeld weer wel.

Opgaven

Opgave 1. *Druk het karakteristieke polynoom van $I + A$ uit in dat van A. Wat betekent dit voor de eigenwaarden en dus voor de determinant? En voor het spoor?*

Opgave 2 (IMC 2004)**.** *Laat A een reëele 4×2- en B een reëele 2×4-matrix zijn, zo dat*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vind BA.

Opgave 3. *Zij A een $(n-1) \times n$-matrix over $\mathbb{Z}$ waarvoor iedere rijsom gelijk is aan 0. Bewijs dat $\det(AA^t) = nk^2$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z}$.*

Opgave 4 (PUMA 2010)**.** *Zij* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *een* $n \times n$*-matrix met determinant gelijk aan* 1*. Zij* $B = (a_{ij}+1)_{1\leq i,j\leq n}$ *de matrix bekomen door alle entries van* A *met* 1 *te verhogen. Toon aan dat*

$$\det B = 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A^{-1})_{ij}.$$

Opgave 5 (De determinantstelling van Sylvester)**.** *Laat* A *een* $n \times k$*- en* B *een* $k \times n$*-matrix zijn. Bewijs dat*

$$\det(I + AB) = \det(I + BA).$$

Opgave 6. *Laat* A *een* 3×2*- en* B *een* 2×3*-matrix zijn zo dat*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Bereken BA*.*

Opgave 7 (IMC 1997)**.** *Zij* M *een inverteerbare matrix van dimensie* $2n \times 2n$*. Als we* M *en* M^{-1} *opdelen in* $n \times n$*-matrices, dan krijgen we*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \textit{en} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat $\det M \cdot \det H = \det A$*.*

Opgave 8 (IMC 2007)**.** *Noem een polynoom* $P(x_1, \ldots, x_k)$ *geslaagd als er* 2×2*-matrices* $A_1, \ldots, A_k$ *bestaan zo dat*

$$P(x_1, \ldots, x_k) = \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right).$$

Vind alle waarden voor k *waarvoor alle homogene polynomen in* k *variabelen van graad* 2 *geslaagd zijn.*

Opgave 9. *Laat* A*,* B*,* C *en* D *vier* $n\times n$*-matrices zijn over* $\mathbb{R}$*, zo dat* AB^t *en* CD^t *symmetrische matrices zijn en* $AD^t - BC^t = I$*. Bewijs dat* $A^tD - C^tB = I$*.*

Opgave 10. *Laat* A *een* $m \times n$*- en* B *een* $p \times q$*-matrix zijn. Bewijs dat* $\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B$ *gelijk is aan de rang van de blokmatrix:*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Ga ook na dat

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

voor iedere $m \times q$*-matrix* C*.*

Opgave 11 (De rangongelijkheid van Sylvester)**.** *Gebruik de vorige opgave om te bewijzen dat voor twee matrices* A *en* B *van respectievelijke afmetingen* $m \times n$ *en* $n \times p$ *geldt*

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B \leq \operatorname{Rg} AB + n.$$

Opgave 12 (Frobenius-ongelijkheid)**.** *Bewijs ook de volgendende generalisatie van de rangongelijkheid van Sylvester:*
Laat A *een* $m\times n$*-,* B *een* $n\times p$*- en* C *een* $p\times q$*-matrix zijn over een lichaam* k*. Bewijs de volgende ongelijkheid*

$$\operatorname{Rg} ABC \geq \operatorname{Rg} AB + \operatorname{Rg} BC - \operatorname{Rg} B.$$