Opgaven week 1: Inductie

Opgave 1 *Definieer de rij Fibonacci-getallen als volgt:* $F_1 = F_2 = 1$ *en voor* $n > 2$ *geldt* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. *Bewijs dat*

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 2 *Bewijs dat voor* $n \geq 2$ *het getal* $n! - 1$ *geschreven kan worden als de som van* $n - 1$ *delers van* $n!$.

Opgave 3 *Gegeven zijn* n *lijnen, die het vlak opdelen in gebieden. Bewijs dat je ieder vlak rood of blauw kan kleuren zo dat aangrenzende gebieden niet dezelfde kleur hebben.*

Opgave 4 *Gegeven is een reëel getal* x *zo dat* $x + \frac{1}{x}$ *geheel is. Bewijs dat* $x^n + \frac{1}{x^n}$ *ook geheel is.*

Opgave 5 *Gegeven zijn* $2n$ *punten in de ruimte* ($n \geq 2$)*. Er zijn* $n^2 + 1$ *paren punten verbonden door een lijnstuk. Laat zien dat er drie punten zijn die onderling allemaal verbonden zijn.*

Opgave 6 *Definieer een rij* a_n *door* $a_0 = 9$ *en* $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$. *Bewijs voor alle* $n \geq 0$ *dat* a_n *eindigt op (minstens)* 2^n *negens.*

Opgave 7 *Zij* n *een natuurlijk getal. Definieer de* $n \times n$*-matrix* A *door* $A_{n,n} = n^2$, $A_{i,i+1} = i + 1 = A_{i+1,i}$ *en* $A_{i,i} = i^2 + 1$ *voor alle* $1 \leq i < n$, *en nullen op de overige posities. Bepaal* $\det A$.

Opgave 8 *Een rij* x_n *wordt gedefinieerd door* $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$ *en*

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n \qquad \textit{voor} \;\; n \geq 1.$$

Bewijs dat x_n *een kwadraat is van een natuurlijk getal voor alle* $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 9 *Zij* n *een natuurlijk getal. Gegeven is een verzameling* S *van* $2n - 1$ *verschillende irrationale getallen. Bewijs dat er* n *verschillende* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ *zijn, zo dat voor alle niet-negatieve rationale getallen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *met* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$ *geldt dat* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ *irrationaal is.*

Opgave 10 *Elk punt van een willekeurige eindige graaf kan blauw of rood zijn. In de beginsituatie zijn alle punten rood en een zet bestaat eruit om een punt en al zijn buren van kleur te laten wisselen. Bewijs dat het voor elke graaf mogelijk is om de kleur van alle punten blauw te krijgen met een rij van deze zetten.*