Week 6: Lineaire algebra I

Lineaire ruimten en afbeeldingen

We gaan beginnen met lineaire algebra en wel over een willekeurig lichaam $\mathbb{F}$. (Als dit je niks zegt, doe maar net alsof $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.) We gaan ervanuit dat de volgende zaken bekend zijn:

- De begrippen lineaire (deel)ruimte en lineaire afbeelding;
- Lineaire (on)afhankelijkheid van vectoren;
- De definitie van een basis en het bestaan daarvan;
- De dimensie van een lineaire ruimte;
- De dimensie van een deelruimte is niet groter dan van de hele ruimte (gelijkheid geldt als de deelruimte de hele ruimte is en kan gelden als we te maken hebben met een oneindig dimensionale vectorruimte);
- De kern en beeld van een lineaire afbeelding zijn lineaire deelruimten.

Vanaf nu gaan we enkel werken met eindig dimensionale lineaire ruimten, al kan het soms geen kwaad om te bedenken dat bijvoorbeeld $\mathbb{F}[X]$ ook een vectorruimte is over $\mathbb{F}$.

Definitie 1 *Zij A een lineaire afbeelding. De dimensie van het beeld van A noemen we de rang en schrijven we als* $\operatorname{Rg} A$.
Soms hebben we ook de dimensie van de kern nodig, die we schrijven als $\operatorname{Nul} A$.

Merk op dat het woord matrix tot hiervoor nog niet eenmaal is gevallen! Het blijkt dan ook dat je vaak genoeg niet met matrices hoeft te werken om heel nuttige dingen kan zeggen. Zo ook de volgende stelling.

Stelling 1 *Als A en A' lineaire afbeeldingen van $\mathbb{F}^m$ naar $\mathbb{F}^n$ zijn en B een lineaire afbeelding van $\mathbb{F}^n$ naar $\mathbb{F}^p$ is, dan gelden de volgende belangrijke uitspraken:*

- $\operatorname{Rg} A \leq \min(m, n)$;
- $\operatorname{Rg} BA \leq \min(\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$;
- $\operatorname{Rg}(A + A') \leq \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} A'$.

Deze uitspraken kan je gemakkelijk zelf bewijzen, alleen zou de bewering $\operatorname{Rg} A \leq m$ een probleem kunnen zijn. Het is intiutief duidelijk dat na het toepassen van een lineaire afbeelding de dimensie niet omhoog kan. Uiteraard kan de dimensie wel naar beneden, zoals wanneer je bijvoorbeeld de ruimte op een vlak projecteert. Het aantal dimensies dat je dan kwijtraakt is intuitief ook gelijk aan de dimensie van nulruimte. Dit is ook daadwerkelijk zo, zoals de volgende stelling laat zien.

Stelling 2 *Zij A een lineaire afbeelding met als domein een lineare ruimte van dimensie m. Dan geldt*

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Nul} A = m.$$

We zullen deze stelling niet bewijzen en merken alleen nog even op dat hieruit direct volgt dat $\operatorname{Rg} A \leq m$.

Matrices

Van een lineaire afbeelding is het natuurlijk een kleine stap naar een matrix! Denk echter niet dat het uitwisselbare begrippen zijn. Je kunt van een lineaire afbeelding namelijk pas een matrix maken als je een basis hebt gekozen in zowel het domein als het codomein. Deze keuze is lang niet triviaal! Bekijk daartoe een lineaire afbeelding van een eindig dimensionale vectorruimte naar zichzelf. In dit geval gebruiken we dezelfde basis voor het domein als het codomein. Het is bekend dat twee verschillende bases geconjugeerde matrices opleveren, maar in beide matrices zouden we de eigenschappen van de lineaire afbeelding terug moeten kunnen vinden. Zie daarover de volgende stelling, die niet eens specifiek over vierkante matrices gaat.

Stelling 3 *Zij A een $m \times n$-matrix. Het maximum aantal lineair onafhankelijke kolommen van A is gelijk aan het maximum aantal lineair onafhankelijke rijen. Bovendien is dit aantal gelijk aan de rang van iedere lineaire afbeelding gerepresenteerd door A.*

Dit aantal is constant onder vermenigvuldiging met inverteerbare matrices en dus in het bijzonder invariant onder conjugatie. Van een matrix kunnen we gemakkelijker terug naar een lineaire afbeelding: een $m \times n$-matrix kunnen we zien als een lineaire afbeelding van $\mathbb{F}^n$ naar $\mathbb{F}^m$, als we op de vectorruimten bijvoorbeeld de standaardbasis kiezen. Het bewijs van de volgende nuttige stelling is daar een voorbeeld van.

Stelling 4 *De rang van een matrix is gelijk aan de groottte van de grootste vierkante minor met determinant ongelijk aan* 0.

Hetzelfde geldt voor de volgende stelling.

Stelling 5 *Laat A en B twee $n \times n$-matrices zijn, zo dat $AB = I_n$. Dan geldt ook $BA = I_n$.*

In een algemene ring geldt natuurlijk niet altijd dat een links-inverse ook een rechts-inverse is, maar bij matrices blijkbaar wel. Uiteraard geldt niet altijd $AB = BA$, maar vaak kan je bovenstaande stelling wel gebruiken als je over matrices iets moet bewijzen wat hier op lijkt. Dan nog even over de opgaven: vanaf nu gaan er ook matrices voorkomen in de opgaven. Als daar elementen van zijn gegeven haal daar dan zo veel mogelijk informatie uit en probeer vervolgens over de opgave na te denken in lineaire afbeeldingen.

Opgaven

Opgave 1 *Laat A en A' lineaire afbeeldingen zijn van $\mathbb{F}^m$ naar $\mathbb{F}^n$ en zij B een lineaire afbeelding van $\mathbb{F}^n$ naar $\mathbb{F}^p$. Bewijs je favoriete viertal van onderstaande beweringen:*

a) $\operatorname{Rg} A \leq n$;

b) $\operatorname{Rg}(-A) = \operatorname{Rg} A$;

c) $\operatorname{Rg} A = 0$ *dan en slechts dan als A de nulafbeelding is;*

d) $\operatorname{Rg} A = n$ *dan en slechts dan als A surjectief is;*

e) $\operatorname{Rg} A = m$ *dan en slechts dan als A injectief is;*

f) A is bijectief -en daarmee meteen inverteerbaar, zoals alle groepshomomorfismes (laat nog wel even zien dat de inverse scalair vermenigvuldigen behoudt)- dan en slechts dan als $m = n$ en $\operatorname{Rg} A = n$;

g) $\operatorname{Rg} BA \leq \min(\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$;

h) Als $\operatorname{Rg} B = n$ *dan geldt* $\operatorname{Rg} BA = \operatorname{Rg} A$;

i) Als $\operatorname{Rg} A = n$ *dan geldt* $\operatorname{Rg} BA = \operatorname{Rg} B$*;*

j) $\operatorname{Rg}(A + A') \leq \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} A'$.

Van bovenstaande opgave is het zeker niet nodig om alles te onthouden (of om alles helemaal waterdicht te kunnen bewijzen). Het belangrijkste is te weten hoe je dit soort resultaten gemakkelijk kan bedenken als je ze nodig hebt. Mocht je er toch een paar willen onthouden kijk dan nog even naar de stellingen hierboven. Dat zijn de belangrijkste resultaten, samen met de volgende opgave.

Opgave 2 (De rangongelijkheid van Sylvester) *Zij A een lineaire afbeelding van $\mathbb{F}^m$ naar $\mathbb{F}^n$ en zij B een lineare afbeelding van $\mathbb{F}^n$ naar $\mathbb{F}^p$. Bewijs de volgende ongelijkheid*

$$\operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B \leq \operatorname{Rg} BA + n.$$

Opgave 3 *Laat $n > k$ twee natuurlijke getallen zijn en zij A_i een reële $n \times n$-matrix van rang $n - 1$ voor iedere gehele $1 \leq i \leq k$. Bewijs dat*

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \neq 0.$$

Opgave 4 *Zij A de $n \times n$-matrix waarvan de (i, j)de coëffciënt gelijk is aan $i + j$, voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Wat is de rang van A?*

Opgave 5 *Bewijs stelling 5 door A en B te interpreteren als lineaire afbeeldingen.*

Opgave 6 *Laat A en B reële $n \times n$-matrices zijn, zo dat*

$$AB + A + B = 0.$$

Bewijs dat $AB = BA$.

Opgave 7 *Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Wat is de minimale en maximale mogelijke rang van een $n \times n$-matrix waarvan de coëfficiënten precies de getallen 1 tot en met n^2 zijn?*

Opgave 8 *Bekijk twee vierkante matrices P en Q van dezelfde grootte. Er is gegeven dat*

$$P^2 + P = Q^2 + Q$$

en dat $P + Q + I$ inverteerbaar is. Bewijs dat P en Q gelijke rang hebben.

Opgave 9 *Laat $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ twee reële 10×10-matrices zijn zo dat $a_{ij} = b_{ij} + 1$ voor alle i en j, en zo dat geldt $A^3 = 0$. Bewijs dat $\det B = 0$.*

Opgave 10 *Zij n een vast positief geheel getal. Bepaal de kleinst mogelijke rang van een $n \times n$-matrix die enkel nullen op de diagonaal heeft en positieve getallen op de andere plekken.*

Opgave 11 *Laat A, B en C vierkante reële matrices van dezelfde dimensie zijn en neem aan dat A inverteerbaar is. Bewijs dat $(A - B)C = BA^{-1}$ als gegeven is dat $C(A - B) = A^{-1}B$.*

Opgave 12 *Laat A en B matrices zijn van respectievelijke afmeting 3×2 en 2×3, zo dat*

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bepaal BA.