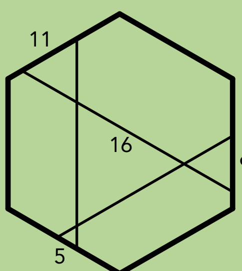
Afgelopen maart vond de vierde editie van de regionale tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Bij de opgaven van deze wedstrijd zijn vaak meerdere oplossingen mogelijk: soms werkt stug doorzetten en goed rekenen, maar vaak kun je met een slim idee het werk flink beperken. In dit artikel willen we dat laten zien aan de hand van opgave B5, die slechts 8% van de deelnemers wist op te lossen.

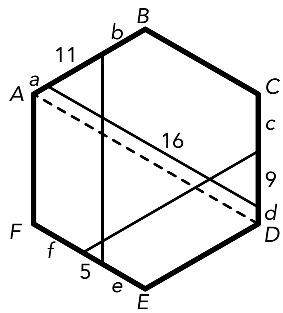
■ door Daniël Kroes en Julian Lyczak

DE VEELZIJDIGHEID VAN DE ZESHOEK

Opgave B5 (NWO tweede ronde 2013):
Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld, zoals in figuur 1. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de figuur aangegeven zijn. Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?



Figuur 1



Figuur 2

In bovenstaande opgave wordt gevraagd naar de lengtes van de zijden van de zeshoek en we zien dat de gegeven lengtes 5, 9 en 11 al onderdeel zijn van zo'n zijde. Laten we daarom de overige twee stukjes van die drie zijden een naam geven, zoals in figuur 2.

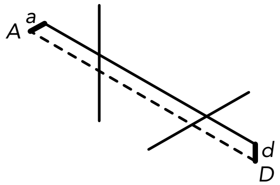
We hebben nu dus zes variabelen, maar als we goed kijken zien we dat er eigenlijk maar drie zijn. Kijk maar eens naar figuur 3 met daarin de lengtes a, d en de diagonaal AD. In deze figuur zijn twee zijden evenwijdig en twee hoeken zijn allebei 60°. Het is dus een zogeheten *gelijkbenig trapezium*: er geldt $a = d$. Net zo geldt dat $b = e$ en $c = f$, dus laten we drie nieuwe variabelen kiezen: $x = a = d$, $y = b = e$ en $z = c = f$. Nu kunnen we de lengte van de zijde van de zeshoek op drie manieren berekenen:

$$x + 11 + y = y + 5 + z = z + 9 + x.$$

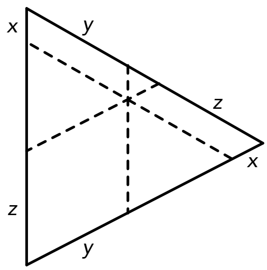
Door steeds twee van de uitdrukkingen met elkaar te vergelijken, vinden we dat

$$z = y + 2,\ z = x + 6 \text{ en } y = x + 4.$$

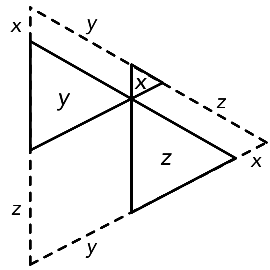
In principe kunnen we drie vergelijkingen met drie onbekenden vaak oplossen. Maar het blijkt hier niet te lukken, omdat de derde vergelijking gewoon volgt uit de eerste twee, dus daar hebben we eigenlijk niets aan. Dit is niet zo verwonderlijk, want we hebben nog niets gedaan met die middelste driehoek, die met zijden van lengte 16. Daar zullen we dus nog iets mee moeten om een extra verband tussen x, y en z te vinden.



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

We hadden al AD getrokken en als we nogmaals naar figuur 3 kijken, zien we dat die lijnstukjes in het midden ook lengte x hebben. Deze lijnstukjes zijn wel weer een deel van die lengte 16. We willen natuurlijk ook iets met y en z en daarom trekken we de overige twee diagonalen ook. Nu zien we de lengtes x, y en z heel vaak voorkomen in de middelste driehoek, zie figuur 4. Deze gelijkzijdige driehoek is opgedeeld in drie vierhoeken en drie gelijkzijdige driehoeken. Door alle evenwijdige lijnen zijn de vierhoeken allemaal parallellogrammen, waardoor we ook de lengtes van de zijden van de gelijkzijdige driehoekjes kunnen bepalen zoals in figuur 5.

Als we goed kijken, volgt nu direct dat de lengte 16 van de zijde van deze gelijkzijdige driehoek precies $x + y + z$ is. Dit levert de extra vergelijking die we zochten:

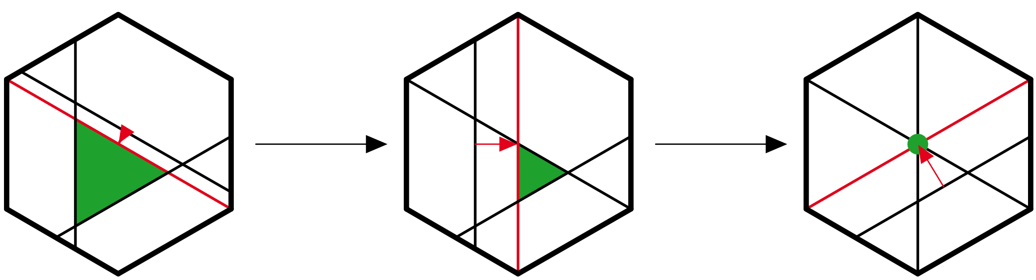
$$x + y + z = 16.$$

Nu is het niet meer moeilijk om x, y en z te berekenen. Vul bijvoorbeeld $y = x + 4$ en $z = x + 6$ in in $x + y + z = 16$. Dan vinden we

$$16 = x + (x + 4) + (x + 6) = 3x + 10.$$

Dus $x = 2$ en daarmee vinden we $y = 6$ en $z = 8$. Nu is de lengte van een zijde van de zeshoek precies gelijk aan $x + 11 + y = 2 + 11 + 6 = 19$. Voor de zekerheid kunnen we controleren of ook $y + 5 + z = 19$ en $z + 9 + x = 19$. Dit blijkt inderdaad zo te zijn en met volle overtuiging schrijven we 19 op als antwoord.

SCHUIVEN Het vinden van de vergelijking $x + y + z = 16$ kunnen we ook heel mooi dynamisch afleiden. Kijk maar eens naar figuur 6. In het eerste plaatje schuiven we een van de drie lijnen richting de diagonaal AD. De gelijkzijdige driehoek in het midden krijgt dan precies zijden met lengte $16 - x$. Daarna kunnen we de volgende lijn naar de diago-



Figuur 6

naal BE verplaatsen. Dan neemt de lengte van de zijde van de gelijkzijdige driehoek in het midden nog verder af met y. Als we dit trucje nog een keer herhalen, krijgen we in het midden dus een gelijkzijdige driehoek met als lengte van de zijde $16 - x - y - z$. Echter, deze gelijkzijdige driehoek is een punt geworden en heeft dus ‘afmeting’ 0. Dus $x + y + z = 16$, zoals we ook al eerder hadden gevonden.

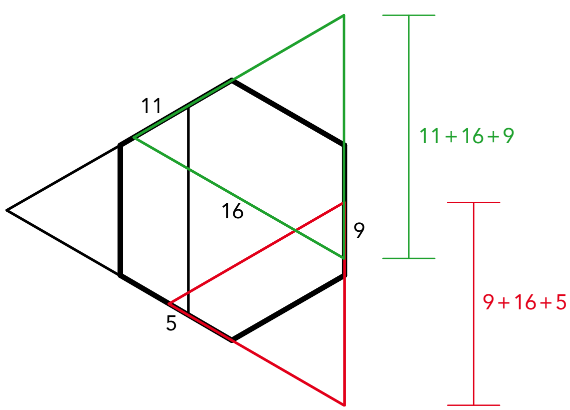
Nu hebben we trouwens de vergelijkingen $z = y + 2$, $z = x + 6$ en $y = x + 4$ niet meer nodig. We hadden namelijk ook het volgende kunnen doen. In plaats van de lengte van de zijde van de zeshoek te berekenen, kunnen we ook drie maal deze lengte berekenen. Dit is namelijk gelijk aan

$$(x + 11 + y) + (y + 5 + z) + (z + 9 + x) =$$
$$2(x + y + z) + 25 =$$
$$2 \cdot 16 + 25 = 57.$$

Delen door 3 levert nu onmiddellijk dat het antwoord 19 is.

UITBREIDEN We hebben het antwoord al op twee verschillende manieren gevonden, maar er is nóg een methode. Eén waar minder rekenwerk aan te pas komt. Hiervoor moet je weer een heel andere creatieve stap maken. De vraag is natuurlijk welke. Laten we daarvoor weer even terug gaan naar figuur 1. De zeshoek wordt nu opgedeeld in vier driehoeken en drie zeshoeken. Het valt op dat de drie zeshoeken er niet bepaald aantrekkelijk uitzien. We willen ons dus vooral concentreren op de gelijkzijdige driehoeken.

Zoals we eerst steeds lijnen binnen de figuur tekenden, kunnen we ook juist een mooie gelijkzijdige driehoek krijgen door de figuur *uit te breiden*, zoals in figuur 7. Nu hebben we een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden drie keer zo lang zijn als die van de zeshoek. Binnen deze driehoek vinden we nu nog meer gelijkzijdige driehoeken, in het bijzonder de twee die aangegeven zijn met de kleuren groen en rood. De groene driehoek heeft als lengte van de zijde $11 + 16 + 9 = 36$, want dat is precies de zijde linksonder. De rode heeft juist zijdelengte $9 + 16 + 5 = 30$, wat gemakkelijk te zien is door naar de zijde linksboven te kijken. Als we nu naar de rechterzijde van de grote driehoek kijken, bestaat deze precies uit deze twee zijden die een overlap hebben van lengte 9. Dus is de zijde van de grote driehoek $36 + 30 - 9 = 57$ lang. Deel door 3, en we komen wederom op 19 uit. ■



Figuur 7