

Week 1: Inductie (set 1)

Deze week gaan we aan de slag met inductie. Inductie is een zeer krachtige bewijstechniek, die jullie als het goed is in college al een keer gezien hebben. Het idee van inductie is heel simpel. Je wilt een stelling bewijzen voor alle natuurlijke getallen n . Dan bewijs je de stelling eerst voor $n = 1$ (ook wel de inductiebasis genoemd). En vervolgens bewijs je voor elk natuurlijk getal k het volgende (ook wel de inductiestap genoemd): als de stelling geldt voor alle $n \leq k$ (ook wel de inductiehypothese genoemd), dan geldt de stelling ook voor $n = k + 1$. We illustreren dit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeldopgave 1. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Bewijs. We gaan dit bewijzen met inductie. Eerst zullen we de inductiebasis controleren. Voor $n = 1$ is het inderdaad waar dat $1 = 2^1 - 1$.

Nu gaan we kijken naar de inductie stap. Stel dat k een natuurlijk getal is en dat de stelling waar is voor alle $n \leq k$. We willen nu kijken naar

$$1 + 2 + \dots + 2^k$$

en bewijzen dat dit gelijk is aan $2^{k+1} - 1$. We weten al dat

$$(1 + 2 + \dots + 2^{k-1}) + 2^k = (2^k - 1) + 2^k$$

vanwege de inductiehypothese. Nu merken we op dat dit gelijk is aan $2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$, zoals we wilden bewijzen. \square

Met inductie kun je allerlei dingen bewijzen, bijvoorbeeld identiteiten zoals in de voorbeeldopgave en in opgave 2, maar ook ongelijkheden zoals in opgave 3. Eigenlijk kun je elke opgave waar een n in voorkomt die over de natuurlijke getallen loopt oplossen met behulp van inductie. In deze set zijn enkele eenvoudige opgaven over inductie te vinden. Op onze website kun je ook moeilijkere sets vinden als je meer uitdaging zoekt.

Opgaven

Opgave 1. *Aan een schaaktoernooi doen $n \geq 2$ spelers mee. Elk tweetal spelers speelt precies een keer tegen elkaar. Bewijs met inductie dat er in totaal $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ wedstrijden gespeeld worden.*

Opgave 2. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n \cdot (n + 3) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 5).$$

Opgave 3. *Bewijs dat $2 \cdot 3^n > 7n + 3$ voor alle gehele getallen $n \geq 2$.*

Opgave 4. *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4.*

Opgave 5. *Voor natuurlijke getallen n wordt a_n gedefinieerd door*

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n - 2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n - 1)}.$$

Bewijs dat voor elke n geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n + 1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3n + 1}}.$$

Opgave 6. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Opgave 7. *Bestaat er een getal van de vorm $444 \dots 4443$ dat deelbaar is door 13 ?*

Opgave 8. *De rij Fibonacci-getallen is als volgt gedefinieerd: $F_1 = F_2 = 1$ en $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ voor alle $n \geq 0$. Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Opgave 9. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$.*

Opgave 10. *Zij h een reëel getal groter dan -1 . Bewijs met inductie dat $(1+h)^n \geq 1+nh$ en bedenk ook waar je in het bewijs gebruikt dat $h > -1$.*