Week 10: Limieten I (set I)

Opgave 1 *Zijn a en b twee positieve reële getallen. Definieer nu $a_0 = a$, $b_0 = b$ en voor $n \geq 1$*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad \text{en} \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

Bewijs dat a_n en b_n convergeren en wel naar dezelfde limiet.

Je mag de ongelijkheid van het meetkundige en het rekenkundige gemiddelde gebruiken: voor positieve reële x en y geldt

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Gelijkheid geldt precies als $x = y$.

Opgave 2 *Bewijs dat*

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

convergeert en bepaal de limiet.

Opgave 3 *Gegeven is een rij reële getallen a_n met $0 < a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ voor alle $n \geq 1$. Bewijs dat de reeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergeert.

Opgave 4 *Beschouw het kwadratische polynoom $T(x) = x^2 - c$, waarbij $c > 0$. We definiëren de n-de iteratie door $T_n(x) = T_{n-1}(T(x))$ voor $n \geq 1$, waarbij $T_0(x) = x$. Merk op dat T_n een polynoom is van graad $2n$. Noem x_n dan het grootste reële nulpunt van T_n. Toon aan dat de rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert en bepaal de limiet.*

Opgave 5 *Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een niet-stijgende rij van positieve getallen. Bewijs dat $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergeert dan en slechts dan als $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ convergeert.*

Opgave 6 *Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een continue functie. Beschouw de rij $(x_n)_{n\geq 0}$ gegeven door $x_0 = a \in [0,1]$ en $x_{n+1} = f(x_n)$. Laat zien dat de rij convergeert dan en slechts dan als*

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Opgave 7 *Zij $a_1 = \sqrt{2}$ en voor $n > 1$ definieren we $a_n = (\sqrt{2})^{a_{n-1}}$. Bewijs dat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert en vind de limiet.*

Opgave 8 *Definieer voor $n \in \mathbb{N}$ de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $a \mapsto (n!)^{n^a}$. Vind alle reële getallen a waarvoor de rij $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar een waarde in $\mathbb{R}$ en bepaal de limiet indien deze bestaat.*

Opgave 9 *Bewijs dat*

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}}$$

convergeert en bepaal de limiet.