Week 10: Limieten I (set II)

Opgave 1 *Laat a en b positieve reële getallen zijn. Bepaal*

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Opgave 2 *Bepaal*

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}.$$

Opgave 3 *Zij $(a_n)_n$ een rij reële getallen die voldoet aan*

$$(2-a_n)a_{n+1}=1.$$

Bewijs dat de limiet $\lim_{n\to\infty}a_n$ bestaat en bepaal deze limiet.

Opgave 4 *Zij N een positief reëel getal. Begin met een willekeurige positieve x_0 en definieer*

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{N}{x_n}\right).$$

Bepaal $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Opgave 5 *Zij $f:[0,1]\to[0,1]$ een continue functie. Beschouw de rij $(x_n)_{n\geq 0}$ gegeven door $x_0=a\in[0,1]$ en $x_{n+1}=f(x_n)$. Laat zien dat de rij convergeert dan en slechts dan als*

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

Opgave 6 *Zij a een positief reëel getal ongelijk aan 1. Bepaal*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Opgave 7 *Zij p reëel en ongelijk aan 0. Definieer het p-de machtsgemiddelde van n getallen $x_1,x_2,\ldots,x_n$, als*

$$M_p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bewijs dat

$$\lim_{p\to 0}M_p=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Opgave 8 *Bereken de limiet*

$$\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\ldots}}}}}.$$

Opgave 9 *Bepaal*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Opgave 10 *Vind*

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_0^k(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

Opgave 11 *Bepaal*

$$\sqrt[8]{2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\frac{1}{2207-\ldots}}}}.$$