Week 13: Polynomen II (set I)

Deze week gaan we weer polynomen doen. Bedenk dat je wil werken met nulpunten en dat je soms zelfs een nieuw polynoom kan maken met veel nulpunten.

Opgaven

Opgave 1. *Een derdegraads polynoom $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ heeft drie verschillende nulpunten r, s en t. Zij Q het monische derdegraads polynoom dat voldoet aan $Q(r) = s + t$, $Q(s) = t + r$ en $Q(t) = r + s$. Druk $Q(0)$ uit in de coëfficiënten van P.*

Opgave 2. *Zij $P(x)$ een polynoom met reële coëfficiënten. Stel dat $P(x) = x$ voor $x = 1, 2, \ldots, 10$ en $P(11) = 13$. Bewijs dat $\deg P \geq 10$.*

Opgave 3. *Zij $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Hoeveel verschillende polynomen $Q(x)$ (met reële coëfficiënten) zijn er met de eigenschap dat er een polynoom $R(x)$ van graad hoogstens 3 bestaat zodat $P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$?*

Opgave 4. *Gegeven zijn verschillende reële getallen a, b en c en een kwadratisch polynoom $f(x)$, zodat*

$$f(a) = bc, \quad f(b) = ac \quad \text{en} \quad f(c) = ab.$$

Bepaal $f(a + b + c)$.

Opgave 5. *Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficiënten zodat $P(x)$ en $P(P(P(x)))$ een gemeenschappelijk, niet noodzakelijk geheeltallig, nulpunt hebben. Bewijs dat $P(x)$ en $P(P(P(x)))$ een gemeenschappelijk geheeltallig nulpunt hebben.*

Opgave 6. *Gegeven zijn verschillende gehele getallen a_1 tot en met a_n met $n > 1$. Bewijs dat het polynoom*

$$(x - a_1) \ldots (x - a_n) - 1$$

irreducibel is over $\mathbb{Z}$.

Opgave 7. *Zij $p(x)$ een polynoom van graad 5 met gehele coëfficiënten. Gegeven is verder dat*

$$p(0) = 100, p(1) = 105, p(2) = 110, p(3) = 115.$$

Als $p(4)$ positief is, vind het minimum voor $p(4)$.

Opgave 8. *Vind alle polynomen P met gehele coëfficiënten die voldoen aan*

$$P(P(x)) = P(x^n) + P(x) - 1,$$

waarbij n de graad van P is.

Opgave 9. *Zij f een irreducibel polynoom met gehele coëfficiënten. Stel dat $|f(0)|$ geen kwadraat is. Bewijs dat $f(x^2)$ irreducibel is.*

Opgave 10. *Gegeven zijn matrices $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ die voldoen aan $\det A = \det B = \det C$ en $\det(A + iB) = \det(C + iA)$. Bewijs dat $\det(A + B) = \det(C + A)$.*