Week 4: Ongelijkheden II (set 1)

Deze week gaat over de ongelijkheid tussen het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde.

Stelling 1 (De ongelijkheid van het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde) *Laat $a_1, \dots, a_n$ niet-negatieve reële getallen zijn. Dan geldt*

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

en gelijkheid treedt op enkel en alleen als $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Als de a_i'tjes positief zijn, dan kunnen we deze ongelijkheid uitbreiden.

Stelling 2 (De ongelijkheid van het meetkundig en het harmonisch gemiddelde) *Laat $a_1, \dots, a_n$ positieve getallen zijn. Dan geldt*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Gelijkheid geldt precies als $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Als je deze ongelijkheden wil gebruiken, dan kan het handig zijn om op de volgende zaken te letten:

- Let op de richting van het teken: dit geeft je een vermoeden waar je een rekenkundig of juist een meetkundig gemiddelde kunt verwachten.
- Onderzoek wanneer er gelijkheid geldt. Pas nu alleen ongelijkheden toe die gelijkheid geven onder die voorwaarde.
- Laat je leiden door de expliciete getallen (factoren en exponenten) in de uitdrukkingen: staan er veel drieën en driemachten, ga dan niet de ongelijkheden toepassen op vier termen.
- Let altijd goed op op welke getallen je een ongelijkheid toepast! Het is heel belangrijk dat je bovenstaande alleen op niet-negatieve (danwel positieve) getallen toepast.

Opgaven

Oude opgaven

Opgave 1 *Bewijs dat voor alle positieve a, b en c geldt dat*

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Opgave 2 *Laat $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeven zijn. Bepaal het minimum van de functie $f(x) = \frac{a+bx^4}{x^2}$ en bepaal voor welke waarden van x deze waarde wordt aangenomen.*

Opgave 3 *Bewijs dat voor niet-negatieve s en t met $st = 1$ geldt dat*

$$(t+1)(s+1) \geq 4.$$

Opgave 4 *Bewijs dat de ongelijkheid van het harmonische en het meetkundige gemiddelde volgt uit de ongelijkheid van het meetkundige en het rekenkundige gemiddelde.*

Opgave 5 *Bewijs dat voor alle reële x, y en z geldt dat*

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Opgave 6 *Bewijs dat voor reële x, y, z geldt $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{x^2+z^2}$. Wanneer geldt er gelijkheid?*

Opgave 7 *Gegeven dat niet-negatieve x, y en z voldoen aan $(1+x)(1+y)(1+z) = 8$. Bewijs dat $xyz \leq 1$.*

Opgave 8 *Zij n een natuurlijk getal en bekijk n positieve reële getallen x_i en definieer $x_{n+1} = x_1$. Bewijs dat*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq n.$$

Opgave 9 *Zij n een natuurlijk getal en bekijk n positieve reële getallen x_i. Bewijs dat*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq n^2.$$

Opgave 10 *Bewijs dat voor alle positieve a, b en c geldt dat*

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Opgave 11 *Laat zien dat voor alle positieve x, y, z en w geldt dat*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} + \frac{16}{w} \geq \frac{64}{x+y+z+w}.$$

Nieuwe opgaven

Opgave 12 (Opgave 20 (ongelijkheden 1)) *Bewijs dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt dat $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.*

Opgave 13 (Opgave 4 (inleverset α week 5)) *Zij m een positief geheel getal. Bewijs dat voor alle positieve reële getallen a en b geldt dat*

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

Opgave 14 (Opgave 1 (inleverset α week 8)) *Laat $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeven zijn zodat $xyz = 1$. Bewijs dat*

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq 3.$$

Opgave 15 (Opgave 2 (inleverset α week 8)) *Laat $m, n \geq 1$ gehele getallen zijn. Bewijs dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt dat*

$$x^m y^n \leq \left(\frac{mx+ny}{m+n}\right)^{m+n}.$$

Opgave 16 (Opgave 3 (inleverset α week 8)) *Bewijs dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat $a^2 + 4b^2 + 2a + 1 \geq 4ab + 4b$.*

Opgave 17 (Opgave 4 (inleverset α week 8)) *Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Bewijs dat voor alle reële $a > 1$ geldt dat*

$$a^n - 1 > n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Opgave 18 (Larson 7.2.10) *Stel dat alle nulpunten van $x^6 - 6x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ positief zijn. Bepaal a, b, c, d.*