Week 16: Het nut van differentiëren (set I)

Op de meest onverwachte momenten kan het opeens handig blijken om een afgeleide te nemen. Het grootste probleem is vervolgens om de afgeleide juist te bepalen. Hier zijn twee belangrijke regels bij het differentiëren:

Lemma 1 *Een uitdrukking $f(x)$ met daarin op meerdere plekken de variable x, kunnen we differentiëren naar x door te differentiëren naar iedere afzonderlijke x (en daarbij dus doen alsof de rest constanten zijn) en de resultaten op te tellen.*

In formules: zij $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie die voldoet aan $f(x) = g(x, x, \ldots, x)$ dan geldt

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x, x, \ldots, x) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x, x, \ldots, x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x, x, \ldots, x).$$

We kunnen dus bijvoorbeeld $x^{\sin x} + (\sin x)^{e^x}$ differentiëren naar x door te schrijven

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{\sin x_2} + (\sin x_3)^{e^{x_4}}$$

en deze functie af te leiden naar alle vier de variabelen, weer x in te vullen voor de x_i en deze resultaten op te tellen.
Soms kan je wat slimmer zijn en bijvoorbeeld kijken naar

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2} + x_2^{x_3}$$

en dan de afgeleiden van $h(x, \sin x, e^x)$ bepalen:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x, \sin x, e^x) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(x, \sin x, e^x) \cdot \cos x + \frac{\partial h}{\partial x_3}(x, \sin x, e^x) \cdot e^x.$$

We kunnen dit gebruiken om de afgeleide van $f(x) = x^n$ te bepalen. Definieer $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$, dan vinden

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(x, x, \ldots, x) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x, x, \ldots, x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n} g(x, x, \ldots, x) \\
&= [x_2 x_3 \ldots x_n + x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1}]_{x_i = x} \\
&= x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} \\
&= n x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Een tweede nuttige regel bij het differentiëren is de volgende.

Stelling 2 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie op $[a, b]$. Dan is f integreerbaar over $[a, b]$ en is de functie*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$$

differentieerbaar op (a, b). Bovendien geldt er

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\ dt = f(x).$$

Maar wat zijn nou situaties waarin je zou willen differentiëren? Het kan vaak handig zijn bij ongelijkheden. Zo geeft de afgeleide je informatie of een functie bijvoorbeld stijgend of convex is. In het bijzonder als je twee differentieerbare functies $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ hebt die voldoen aan $f(a) \geq g(a)$ en $f'(x) \geq g'(x)$ voor alle $x \in (a, b)$ dan geldt $f(b) \geq g(b)$.
Echter, er kan gelden $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$, maar dat dit trucje niet gaat werken. Bekijk maar x en $100 - x$ op $[0, 1]$. Toevallig kan je dit nu toch toepassen vanaf de andere kant, maar dat hoeft zeker niet altijd zo te zijn: $x \mapsto x, 100 + \sin x$ op $[0, 1]$ is daar dan weer een tegenvoorbeeld van.
Bekijk bijvoorbeeld de volgende opgave.

Voorbeeldopgave 1 (Putnam 1951) *Laat zien dat*

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$$

voor positieve x.

Het is een idee om beide kanten als functies te zien en te gaan differentiëren, maar het probleem is dat we de ongelijkheid moeten bewijzen voor alle $x \geq 0$, maar voor alle $x > 0$. Nu hebben we bij deze techniek wel een startpunt nodig en de ene kant is niet gedefiniëerd, maar we kunnen gelukkig wel met het limiet werken: de functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ is continu en we willen bewijzen dat $f(x) > 0$ voor alle $x \in (0,\infty)$. Nu heeft 0 als basispunt niet zo veel zin, want daar geldt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ en dus zal er wel niet gelden dat $f'(x) > 0$. Wat we wel kunnen doen is, is ∞ als basispunt nemen, daar geldt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Verder vinden we

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x}^2 - \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right).$$

Aangezien $x > 0$ geldt er dat $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1} > 0$ en dus dat $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (0,\infty)$. Dus f is strikt dalend en convergeert naar 0 in oneindig. Dan geldt zeker $f(x) > 0$ voor alle x in het interval $(0,\infty)$.
Als je liever niet met limietpunten als basispunt werkt, dan kan je de vergelijking ook omschrijven naar iets wat wel 0 is gedefinieerd, bijvoorbeeld de substitutie $y = \frac{1}{x}$:

$$\log(1+y) > \frac{y}{y+1}.$$

Dezelfde strategie werkt nu met als basispunt 0, waarin beide kanten gedefinieerd zijn.

Opgaven

Opgave 1 *Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan*

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt + 1.$$

Opgave 2 *Gebruik beide manieren in de tekst om de afgeleide van*

$$x^{\sin x} + (\sin x)^{e^x}$$

uit te rekenen.

Opgave 3 *Geef alle paren (a,b) van positieve gehele getallen die voldoen aan $1 \leq a < b$ en $a^b = b^a$. Bewijs tevens dat er oneindig veel van dergelijke paren zijn met zowel a als b reële getallen.*

Opgave 4 *Vind alle tweemaal differentieerbare functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan $f'(x)f''(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.*

Opgave 5 (Putnam 1991) *Zijn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niet-constante differentieerbare functies die voldoen aan*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \quad g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$$

en $f'(0) = 0$. Laat zien dat $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ voor alle x.

Opgave 6 *Bewijs dat voor iedere gehele $n \geq 1$ de volgende gelijkheid geldt:*

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Opgave 7 *Zij a een positief reëel getal. Vind de waarde van a waarvoor de bepaalde integraal*

$$\int_a^{a^2} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx$$

minimaal is.

Opgave 8 *Zij $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door*

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Bewijs dat F injectief is en vind het bereik van F.