Week 20: Reële analyse (set 1)

Continue functies hebben een hoop fijne eigenschappen die zeker niet gedeeld wordt met algemene functies. Deze week bekijken we de volgende eigenschappen.

Stelling 1 (Tussenwaardestelling) *Zij $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie. Als U samenhangend is, dan geldt dat ook voor het beeld. Oftewel als f twee waarden aanneemt dan neemt f ook alle waarden daartussen aan.*

Niet iedere functie $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neemt een maximum of een minimum aan op het domein. Als het domein echter uit een eindig aantal punten bestaat, dan gebeurt dit uiteraard wel. Verzamelingen die veel lijken op eindige verzamelingen zijn de compacte verzamelingen. Voor $\mathbb{R}$ zijn dat precies de begrensde gesloten verzamelingen.

Stelling 2 (De stelling van Weierstrass) *Zij $f : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding met C compact. Dan neemt f op C zowel een maximum als een minimum aan.*

We hebben nu twee voorbeelden gezien van stellingen die iets zeggen over het bestaan van een punt waarin een functie een bijzondere waarde aanneemt. We zullen nu naar nog zo'n stelling kijken: de stelling van Rolle, ook wel bekend als de middelwaardestelling.

Stelling 3 (Stelling van Rolle) *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie die continu is op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b). Dan bestaat er een punt $c \in (a, b)$ met*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Een veel voorkomende variant is de situatie waarin $f(a) = f(b)$ en er dus een c bestaat waarin de afgeleide nul is.
Het lastigste bij deze stelling is het vinden van de functie waarop je de stelling moet toepassen. Vaak moet je zelf een functie construeren. We zullen in de opgaven wat mogelijkheden zien om uit een functie f de juiste functie g te construeren zo dat $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ precies het resultaat is dat we zoeken voor f. Indien we te maken hebben met een lineaire combinatie van f en f' moeten we vaak op zoek naar een functie h zo dat $hf' + h'f$ al erg lijkt op wat we willen.

Opgaven

Opgave 1 *Zij $I = [a, b]$ een begrensd gesloten interval en $f : I \to I$ een continue functie. Bewijs dat f een dekpunt heeft, oftewel er bestaat een $c \in I$ met $f(c) = c$.*

Opgave 2 *Zij $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ een continu functie die differentieerbaar is op $(0, 1)$ met $f(0) = 0 = f(1)$. Bewijs voor ieder van de onderstaande uitdrukkingen het bestaan van een c in $(0, 1)$ zo dat*

a) $f'(c) = 0$;

b) $f'(c) + f(c) = 0$;

c) $f'(c) + 2f(c) = 0$;

d) $f'(c) + kf(c) = 0$ *met k geheel;*

e) $f'(c) = f(c)$;

f) $f'(c) = f(c) \tan c$;

g) $2f'(c) = f(c) \tan c$;

h) $f'(c) + f(c) \tan c = 0$.

Opgave 3 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een continue functie zo dat* $f \circ f$ *een dekpunt heeft. Bewijs dat* f *ook een dekpunt heeft.*

Opgave 4 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een differentieerbare functie. Bewijs dat er een* $x \in \mathbb{R}$ *bestaat met*

$$f'(x) = \left(\frac{2}{1-x} - \frac{2}{x} \right) f(x).$$

Opgave 5 *Zij* f *een reëelwaardige functie op heel* $\mathbb{R}$ *die minstens* $n+1$ *maal differentieerbaar is. Bewijs dat voor ieder paar reële getallen* $a < b$ *dat voldoet aan*

$$\log \left(\frac{f(b) + f'(b) + \ldots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \ldots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a$$

er een $c \in (a, b)$ *bestaat met*

$$f^{(n+1)}(c) = f(c).$$

Opgave 6 *Zij* $f : [0,1] \to [0,1]$ *een continue functie met* $f \circ f \circ \ldots \circ f(x) = x$ *(2013* f*'jes) voor alle* $x \in [0,1]$*. Bewijs dat* $f(x) = x$ *voor alle* $x \in [0,1]$*.*

Opgave 7 *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *een functie die continu is op* $[a, b]$ *en tweemaal differentieerbaar op* (a, b)*. Als* $f(a) = f(b)$ *en* $f'(a) = f'(b)$*, bewijs dat voor ieder reëel getal* λ *de vergelijking*

$$f''(x) - \lambda \left(f'(x)\right)^2 = 0$$

in ieder geval een oplossing heeft in het interval (a, b)*.*