

Week 8: Algebra I: Functies en binaire operaties (set I)

Opgave 1 Vind alle functies $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ die voldoen aan $f(1) = 3$ en

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 1$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Opgave 2 Stel dat de operatie $*$ op G aan de linksaxioma's van een groep voldoet, i.e. $*$ is associatief, er is een linkseenheidselement $e \in G$ zodat $e * g = g$ voor alle $g \in G$, en voor elke $g \in G$ is er een linksinverser $g_L \in G$ die voldoet aan $g_L * g = g$.

(a) Laat zien dat g_L een rechtsinverser is van g . Hint: kijk naar $(g_L)_L * g_L * g * g_L$.

(b) Laat zien dat e ook een rechtseenheidselement is.

Opgave 3 Bekijk een verzameling S met een binaire operatie $*$, zo dat $x * (y * x) = y$ voor alle x en y in S . Bewijs dat voor alle $a, b \in S$ de vergelijkingen

$$a * x = b \quad \text{en} \quad x * a = b$$

een unieke oplossing hebben in S .

Opgave 4 Vind alle functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x)f(y) = f(x) + yf(x)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 5 Zij S een verzameling met daarop een binaire operatie $*$. Als voor alle $a, b \in S$ geldt $(a * b) * a = b$, bewijs dan dat $a * (b * a) = b$ voor alle $a, b \in S$.

Opgave 6 Zij S een verzameling reële getallen die gesloten is onder vermenigvuldiging. We schrijven $S = T \cup U$ met $T \cap U = \emptyset$. Veronderstel dat voor $a, b, c \in T$ geldt dat $abc \in T$ en dat voor $a, b, c \in U$ geldt dat $abc \in U$. Bewijs dat tenminste één van de verzamelingen T en U gesloten is onder vermenigvuldiging.

Opgave 7 Vind alle functies $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}$ die voor alle x en y in $\mathbb{R}_{\neq 0}$ voldoen aan

$$f(x^2 f(y)) = \frac{y}{x} f(x).$$

Opgave 8 Laat \circ een binaire operaties zijn op een verzameling S , zo dat voor alle $x, y \in S$ geldt

- $x \circ (x \circ y) = y$;
- $(y \circ x) \circ x = y$;

Bewijs dat \circ commutatief is. Is \circ ook associatief?

Opgave 9 Zij S een verzameling en $*$ een binaire operatie op S met

$$\begin{aligned} x * x &= x \quad \text{voor alle } x \in S; \\ (x * y) * z &= (y * z) * x \quad \text{voor alle } x, y, z \in S. \end{aligned}$$

Bewijs dat $*$ commutatief en associatief is.

Opgave 10 Zij $*$ een associatieve binaire operatie op een verzameling Y zo dat $a * b = b * a$ alleen als $a = b$. Bewijs dat $a * (b * c) = a * c$ voor alle $a, b, c \in Y$. Geef een voorbeeld van zo'n binaire operatie.

Opgave 11 Vind alle functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 12 Zij \circ een binaire operatie op \mathbb{R} zo dat $(a \circ b) \circ c = a + b + c$ voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $a \circ b = a + b$.