Week 14: Polynomen van matrices (Set I)

- Een vector $v \neq 0$ en een getal λ zijn respectievelijk een eigenvector en een eigenwaarde van een vierkante matrix A als geldt dat $Av = \lambda v$.
- Eigenwaarden zijn precies de nulpunten van het karakteristieke polynoom p_A.
- Er kunnen meerdere eigenvectoren bij een eigenwaarde zijn, maar het maximale aantal lineair onafhankelijke is hoogstens de multipliciteit van de eigenwaarde als nulpunt van p_A.
- De stelling van Cayley-Hamilton zegt dat het karakteristieke polynoom p_A van een matrix A voldoet aan $p_A(A) = 0$.
- Zij p een polynoom en laat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ alle eigenwaarden zijn van een $n \times n$-matrix A. Dan zijn de eigenwaarden van de matrix $p(A)$ precies $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$.
- Vind een polynoom waar je matrix een 'nulpunt' van is. Daaruit volgen alle eigenwaarden! Kan je dat niet meteen, ga dan gewoon machten uitdrukken in dingen die je al weet.
- Indien $p(A)$ de nulmatrix is, dan zijn alle eigenwaarden van A dus nulpunten van p. Niet ieder nulpunt van p hoeft echt voor te komen, maar soms kan je wel gebruiken dat als de matrix reële coëfficiënten heeft, dat de eigenwaarden reëel zijn en anders in complex geconjugeerde paren voorkomen.

Opgaven

Opgave 1 *Bewijs dat de volgende uitspraken over een vierkante $n \times n$-matrix A equivalent zijn:*

(i) er bestaat een k met $A^k = 0$;

(ii) $A^n = 0$;

(iii) alle eigenwaarden van A zijn nul.

We zeggen in dit geval dat A nilpotent is.

Opgave 2 *Zij A een reële 2×2-matrix met $\det(A) = -1$. Bewijs dat*

$$\det(A^2 + I_2) \geq 4.$$

Wanneer geldt er gelijkheid?

Opgave 3 *Zij A een vierkante matrix.*

(a) Bewijs vanuit het karakteristieke polynoom dat als $\det A = 0$, dat A dan niet inverteerbaar kan zijn.

(b) Stel dat $\det A \neq 0$. Bewijs dat A^{-1} bestaat door een polynoom p te vinden zo dat $p(A)A = I$.

Opgave 4 *Zij $x > 0$ een reëel getal en $A \in M_2(\mathbb{R})$ een matrix zo dat $\det(A^2 + xI_2) = 0$. Bewijs dat*

$$\det(A^2 + A + xI_2) = x.$$

Opgave 5 *Zij A een reële $n \times n$-matrix die voldoet aan $A^2 + I = 0$. Bewijs dat n even is. Wat zijn de mogelijkheden voor de determinant van A?*

Opgave 6 *Bekijk de afbeelding $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{R})$ gedefinieerd door*

$$f(X) = X^n$$

waarbij $n \geq 2$ een geheel getal is. Bewijs dat f niet injectief en niet surjectief is.

Opgave 7 *(a) Laat zien dat er voor elke $m \in \mathbb{N}$ een reële $m \times m$-matrix bestaat die voldoet aan $A^3 = A + I$.*

(b) Bewijs dat $\det A > 0$ *voor iedere $m \times m$-matrix die voldoet aan $A^3 = A + I$.*

Opgave 8 *Zij B een 2×2-matrix. Bewijs dat*

$$\mathrm{Sp}(B^2) = \mathrm{Sp}(B)^2 - 2\det B.$$

Opgave 9 *Zij A een $n \times n$-matrix zo dat $3A^3 = A^2 + A + I$. Laat zien dat de rij A^k convergeert naar een idempotente matrix.*

Opgave 10 *Zij G een eindige groep van reële $n \times n$-matrices $\{M_i\}$ met $1 \leq i \leq r$, waarbij de groepstructuur wordt gegeven door matrixvermenigvuldiging. Stel dat $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Sp}(M_i) = 0$. Bewijs dat $\sum_{i=1}^{r} M_i$ de nulmatrix is.*

Opgave 11 *Zij M een 3×3 magisch vierkant, dat wil zeggen een 3×3-matrix waarin de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee hoofddiagonalen hetzelfde is.*
Laat zien dat voor ieder oneven natuurlijk getal n de matrix M^n een magisch vierkant is.