

Week 3: Getaltheorie I (set 1)

Opgave 1 Zij $N = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97$. Wat is de rest van N bij deling door 96? En bij deling door 101?

Hint: Je hoeft het product niet uit te rekenen.

Opgave 2 Bewijs dat de breuk

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

voor geen enkel geheel getal n te vereenvoudigen is.

Opgave 3 a) Wat is de rest van 2015^{2015} bij deling door 2016?

b) Wat is de rest van 1234568^{2015} bij deling door 3?

c) Wat is het laatste cijfer van 3^{2015} ?

d) Bewijs dat er geen macht van 2 is waarvan de decimale schrijfwijze eindigt op 2012.

Opgave 4 Bewijs dat een getal deelbaar is door 9 precies als de som van de cijfers deelbaar is door 9.

Bewijs ook dat een getal deelbaar is door 11 precies als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Opgave 5 Bewijs dat

$$\frac{\gcd(m, n)}{n} \binom{n}{m}$$

geheel is voor alle $n \geq m \geq 1$.

Opgave 6 Definieer $n = 9^{753}$. Bepaal $\gcd(n^2 + 2, n^3 + 1)$.

Opgave 7 Bewijs dat er niet een paar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ bestaat zodanig dat

$$x^4 + y^3 = 2613527.$$

Opgave 8 Gegeven zijn drie natuurlijke getallen r , s en t die paarsgewijs onderling ondeelbaar zijn. Als a en b elementen zijn van een commutatieve groep met eenheidselement e en $a^r = b^s = (ab)^t = e$, bewijs dan dat $a = b = e$.

Geldt dit ook voor een niet-commutatieve groep?

Opgave 9 Laten u en v twee onderling ondeelbare positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat er gehele getallen a en b groter dan 1 zijn, en positieve gehele getallen n en m , zodanig dat geldt

$$a^{n^u} = b^{m^v} \quad \text{en} \quad a^u = b^v.$$

Opgave 10 De rij f_0, f_1, \dots Fibonaccigetallen is gedefiniëerd door $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$ voor $i \geq 0$. De rij F_0, F_1, \dots Fermatgetallen is gedefiniëerd door $F_m = 2^{2^m} + 1$. Bepaal alle paren niet-negatieve gehele getallen (n, m) met $f_n = F_m$.