

Opgaven week 0

Opgave 1 Zij n een oneven positief geheel getal. Bewijs dat

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \operatorname{ggd}(k, n) = n.$$

Opgave 2 De niet-negatieve gehele getallen $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ zijn gekleurd met drie kleuren. Bestaan er $a, b \in S$ met (a, b) ongelijk aan $(0, 0)$ en $(2, 2)$ zo dat $a \cdot b$ en $a + b$ dezelfde kleur hebben?

Opgave 3 Neem een gelijkzijdige driehoek. Toon aan dat je deze kan opsplitsen in n kleinere gelijkzijdige driehoeken, voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 5\}$.

Opgave 4 In het vlak liggen n lijnen. In hoeveel gebieden delen deze lijnen het vlak maximaal?

Opgave 5 Vind de kleinste natuurlijke n zo dat er gehele getallen $1 \leq x_1, \dots, x_n \leq n$ bestaan zo dat

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{en} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

maar $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \{1, 2, \dots, n\}$.

Opgave 6 Julian en Raymond spelen het volgende spel: ze beginnen met een lege 2016×2016 -matrix. Om de beurt kiezen ze een element van de matrix dat nog niet ingevuld is en schrijven daar een reëel getal. Het spel stopt zodra alle elementen zijn bepaald. Julian wint als de uiteindelijke matrix inverteerbaar is en Raymond wint als de matrix juist singulier is. Als Julian begint, wie heeft er dan een winnende strategie?

Opgave 7 Zij $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die voldoet aan $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Als $f(1000) = 999$, wat is dan $f(500)$?

Opgave 8 Een convex veelvlak met alleen driehoeken als zijvlakken, heeft hoekpunten in 3 kleuren. Bewijs dat het aantal zijvlakken waarvan de drie hoekpunten in de drie verschillende kleuren zijn, even is.

Opgave 9 Voor een natuurlijk getal n definiëren we $\pi(n)$ als het aantal verzamelingen van natuurlijke getallen met som n . We schrijven $\pi_2(n)$ voor het aantal van zulke verzameling met tenminste één tweemacht. Bewijs dat $\pi_2(n+1) = \pi(n)$.

Opgave 10 Een permutatie a_1, a_2, \dots, a_n van $1, 2, \dots, n$ noemen we grandioos als voor iedere $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ geldt dat a_i of het maximum of het minimum is van de getallen a_1, a_2, \dots, a_i .

Hoeveel grandioze permutaties zijn er voor n ?